Klausur Wirtschaftsmathematik

Fakultät für Wirtschaft

Studiengang: Öffentliche Wirtschaft   Datum: 26.01.2021

Matrikelnummer:				**Dozent: Jürgen Meisel**	
Kurs: WOW20B		**Semester:**	1		
Hilfsmittel: Wiss. TR & Formelsammlung				**Bearbeitungszeit: 60 min.**	
Bewertung:	Maximale Punktzahl: 60			Erreichte Punktzahl:	
Prozente:	....			Signum:	
Anmerkungen:	***Bitte bearbeiten Sie nur 5 der 6 Aufgabenstellungen.*** ***<u>Bitte beachten:</u>*** ***Falls Sie bei allen Aufgaben eine Bearbeitung bzw. Teilbearbeitung durchgeführt haben, müssen Sie eine Aufgabe für die Bewertung streichen.*** ***Sollte die Annullierung einer Aufgabe von Ihrer Seite nicht erfolgen, dann kommen die Aufgaben 1 bis 5 in die Wertung!***				

Nr	Thema der Aufgabe	max. Punkte	erreichte Punkte	Bemerkungen
1	**Übergangsmatrizen und stat. Gleichgewicht**	**12**		
2	**Ökonomische Anwendung zur Diff.-Rg. (1 Variable)**	**12**		
3	**Diff.-Rg I (mehrere Var.): Extrema ohne NB**	**12**		
4	**Diff.-Rg II (mehrere Var.): Extrema mit NB**	**12**		
5	**Rechentechnik zu Matrizen**	**12**		
6	**Lineare Optimierung & Simplexalgorithmus**	**12**		
Summe		**60**		

(1) Matrizen und Vektoren: Übergangsmatrizen & Statisches Gleichgewicht

In den Skigebieten (A)lberg, (B)orgio und (C)heveau verbringen jährlich regelmäßig 19.800 Gäste ihren Skiurlaub. Allerdings gibt es natürlich Veränderungen der Gästeverteilung auf die drei Skigebiete von einem zum nächsten Jahr, die lückenhaft in der nachfolgenden Übergangsmatrix dargestellt sind:

$$U[A,B,C]=\begin{pmatrix} a & 0,2 & c \\ 0,1 & b & 3c \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}$$

Im Jahr 2018 konnte man folgendes Verteilungsverhältnis feststellen: A : B : C entspricht 5 : 3 : 2

a) Vervollständigen Sie die Übergangsmatrix U[A, B, C] und erstellen Sie den Verteilungsvektor für das Jahr 2018.

Verwenden Sie nun für die kommenden Aufgaben folgende Angaben:

$$U[A,B,C]=\begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 & 0 \\ 0,3 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \quad und \quad \overrightarrow{p_{2018}}=\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,1 \\ 0,4 \end{pmatrix}$$

b) Welche Anteile sind 2019 zu erwarten?

c) Ermitteln Sie die Anteile in der Skisaison 2017.

d) Das Skigebiet Borgio kann langfristig nur am Markt rentabel existieren, wenn mind. 2.500 Gäste jedes Jahr die Region besuchen.
Untersuchen Sie, ob dies bei gleichbleibendem Wechselverhalten zu erwarten ist.

Lösung:

a) Mit Spaltensumme = 1 gilt:

$$U[A,B,C]=\begin{pmatrix} a & 0,2 & c \\ 0,1 & b & 3c \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0,7=1-0,3 & 0,2 & \begin{array}{c} c=1-3c-0,6 \\ \rightarrow c=0,1 \end{array} \\ 0,1 & 0,6=1-0,4 & \rightarrow 0,3c \rightarrow 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}$$

b) $$U[A,B,C]\cdot\overrightarrow{p_{2018}}=\overrightarrow{p_{2019}} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{p_{2019}} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 & 0 \\ 0,3 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,1 \\ 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,49 \\ 0,11 \\ 0,40 \end{pmatrix}$$

c) $U\left[A,B,C\right]\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\overrightarrow{p_{2018}} \xrightarrow{\text{Lösung LGS}} \overrightarrow{p_{2017}} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}7\\1\\5\end{pmatrix}$

d)

$$Ansatz: \quad U\cdot\vec{x} = \vec{x} \rightarrow (U-E)\cdot\vec{x} = \vec{0}$$

$$\xrightarrow{LGS} \begin{pmatrix}-0.4 & 0.3 & 0.4\\0.1 & -0.4 & 0\\0.3 & 0.1 & -0.4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{\lambda}{13}\cdot\begin{pmatrix}16\\4\\13\end{pmatrix} \; mit\ \lambda\in\Re$$

$$\xrightarrow{x+y+z=1} \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{1}{33}\cdot\begin{pmatrix}16\\4\\13\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}0,4848\\0,1212\\0,3940\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \frac{4}{13}\cdot 19.800 = 2.400 < 2.500 \quad \left[Bedingung\ nicht\ erfüllt\right]$$

Direkte Lösung für statische Verteilung:

$$\begin{pmatrix}-0,4 & 0,3 & 0,4\\0,1 & -0,4 & 0\\0,3 & 0,1 & -0,4\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{1}{33}\cdot\begin{pmatrix}16\\4\\13\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}0,4848\\0,1212\\0,3940\end{pmatrix}$$

(2) Ökonomische Anwendung zur Differentialrechnung mit einer Variablen

Ein-Produkt-Unternehmer Theo Knallfisch – Monopolist – agiert mit der Preis-Absatz-Funktion $p(x) = -2x+60$.

Die Kostenfunktion beläuft sich nach eingehenden Analysen auf $K(x) = x^2 - 15x + 200$

Die hergestellte Menge x wird auch komplett zum jeweiligen Preis p(x) abgesetzt.

a) Bestimmen Sie die Umsatzfunktion und das Umsatz-/Erlösmaximum. Welchen Preis kann Theo Knallfisch hier zugrunde legen?
b) Ermitteln Sie nun die Gewinnfunktion und berechnen Sie Gewinnschwelle und Gewinngrenze des Unternehmens.
c) Wo liegt das Gewinnmaximum? Wie hoch ist es?
d) Erläutern Sie, warum die Grenzkosten und der Grenzerlös in x = 12,5 gleich sind.
e) Berechnen Sie nun noch den Cournot-Punkt.

Lösung:

$$u(x) = p(x)\cdot x \rightarrow u(x) = (-2x+60)\cdot x = -2x^2+60x$$

a) $u'(x) = -4x+60 = 0 \rightarrow x = 15$

$$u''(x) = -4 < 0 \rightarrow Max(15 \quad 450) \quad mit\ p(15) = 30$$

d) $g(x)=u(x)-K(x) \xrightarrow{Ableitung} g'(x)=u'(x)-K'(x) \overset{G_{max}}{=} 0 \rightarrow u'(x)=K'(x)$

Im Gewinnmaximum ist der Abstand zwischen der Umsatz- und der Kostenfunktion am größten; dieser Abstand kann mit den Tangenten an die beiden Funktionen ermittelt werden und daher mittels der Ableitung, was wiederum die Grenzkosten und Grenzerlöse in x_0 darstellen.

b) c) und e)

$$g(x)=u(x)-K(x) \rightarrow g(x)=-2x^2+60x-\left(x^2-15x+200\right)=-3x^2+75x-200$$

$$g(x)=-3x^2+75x-200=0 \rightarrow x_1=3{,}04\,[Gewinnschwelle] \quad und \quad x_2=21{,}96\,[Gewinngrenze]$$

$$g'(x)=-6x+75=0 \rightarrow x=12{,}5$$

$$g''(x)=-6<0 \rightarrow Max(12{,}5 \quad 268{,}75) \quad mit \ p(12{,}5)=35 \xrightarrow{Cournot-Punkt} C(12{,}5 \quad 35)$$

(3) Differentialrechnung I: Extrema ohne Nebenbedingung(en)

Ermitteln Sie die **<u>beiden</u>** stationären Stellen der Funktion

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2-2x+\frac{1}{3}y^3-\frac{5}{2}y^2$$

und untersuchen Sie **<u>diese</u>** auf ihre Extremwerteigenschaft.

Berechnen Sie den Funktionswert nur ***bei <u>der</u> Extremwertstelle*** 😉

Lösung:

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2-2x+\frac{1}{3}y^3-\frac{5}{2}y^2$$

$$\left.\begin{array}{l} f_x(x,y) = x-2=0 \rightarrow x=2 \\ f_y(x,y) = y^2-5y=0 \rightarrow (y-5)y=0 \rightarrow y_1=0 \quad und \quad y_2=5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} S_1(2 \mid 0 \mid f_1) \\ S_2(2 \mid 5 \mid f_2) \end{array}$$

$$Hesse-Matrix: \quad H(f)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2y-5 \end{pmatrix}$$

$$Auswertung \ für \ S_1(2 \mid 0 \mid f_1):$$

$$H_{S_1}(f)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{c} f_{xx}=1>0 \\ \det(H)=-5<0 \end{array}\right\} indefinit \rightarrow SP$$

$$Auswertung \ für \ S_2(2 \mid 5 \mid f_2):$$

$$H_{S_2}(f)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{c} f_{xx}=1>0 \\ \det(H)=5>0 \end{array}\right\} positiv \ definit \rightarrow Min(2 \mid 5 \mid -22{,}833)$$

(4) Differentialrechnung II: Extrema mit Nebenbedingungen

Gegeben sei folgende Produktionsfunktion: $f\left(x,y\right)=2x^{0,7}\cdot y^{0,3}$

Eine Mengeneinheit für x kostet 10,00 €, der Preis für eine Mengeneinheit von y liegt bei 2,00 €. Insgesamt steht ein Budget von b = 20.000 GE zur Verfügung.

a) Bestimmen Sie das optimale Produktionsprogramm mit Hilfe des Lagrangeansatzes.

b) Welchen Wert besitzt der Lagrangeparameter im Maximumfall und welche ökonomische Aussage kann hier getroffen werden, wenn sich das Budget b um 100 GE erhöht?

Lösung:

$$f\left(x,y\right) = 2x^{0,7}\cdot y^{0,3}$$

$$L\left(x,y,\lambda\right) = 2x^{0,7}\cdot y^{0,3}+\lambda\cdot\left(20.000-10x-2y\right)$$

$$L_x\left(x,y,\lambda\right) = 1,4\cdot\frac{y^{0,3}}{x^{0,3}}-10\lambda=0 \rightarrow \lambda=\frac{1,4}{10}\cdot\frac{y^{0,3}}{x^{0,3}}$$

$$L_y\left(x,y,\lambda\right) = 0,6\cdot\frac{x^{0,7}}{y^{0,7}}-2\lambda=0 \rightarrow \lambda=\frac{0,6}{2}\cdot\frac{x^{0,7}}{y^{0,7}}$$

$$0,14\cdot\frac{y^{0,3}}{x^{0,3}}=0,3\cdot\frac{x^{0,7}}{y^{0,7}} \rightarrow y = \frac{30}{14}x = \frac{15}{7}x$$

$$L_\lambda\left(x,y,\lambda\right) = 20.000-10x-2y=0 \rightarrow 20.000=10x+2y$$

$$\xrightarrow{y\;=\;\frac{15}{7}x} 20.000=10x+2\cdot\frac{15}{7}x \rightarrow 20.000=\frac{100}{7}x \rightarrow x=1.400 \xrightarrow{y\;=\;\frac{15}{7}x} y=3.000$$

$$f\left(1.400/3.000\right) = 2\cdot1.400^{0,7}\cdot3.000^{0,3} \approx 3.519,30 \quad oder$$

$$f\left(1.400/\frac{15}{7}\cdot1.400\right) = 2\cdot1.400^{0,7}\cdot\left(\frac{15}{7}\cdot1.400\right)^{0,3} = 2\cdot\left(\frac{15}{7}\right)^{0,3}\cdot1.400 \approx 3.519,30$$

Wert für λ

$$\lambda=0,14\cdot\left(\frac{15}{7}\right)^{0,3}=0,175965$$

Erhöhung Budget um 100 GE: $20.100\left[\text{Budget}\left(\text{neu}\right)\right]$

$\rightarrow$ $100\cdot0,175965 = 17,5965 \approx 17,60$

$\rightarrow$ Erhöhung des Produktionsergebnisses auf 3.536,90

Nachweis:

$$20.100=\frac{100}{7}x \rightarrow 1.407=x \xrightarrow{y\;=\;\frac{15}{7}x} y=3.015$$

$$f\left(1.407/3.015\right) = 2\cdot1.407^{0,7}\cdot3.015^{0,3} \approx 3.536,90 \quad oder$$

$$f\left(1.407/\frac{15}{7}\cdot1.407\right) = 2\cdot1.407^{0,7}\cdot\left(\frac{15}{7}\cdot1.407\right)^{0,3} = 2\cdot\left(\frac{15}{7}\right)^{0,3}\cdot1.407 \approx 3.536,90$$

$$\textit{Unterschied}:\ 3.536,90-3.519,30 = 17,60$$

(5) Rechentechnik zu Matrizen

Bestimmen Sie das Ergebnis des Ausdrucks $Det\left(A+F\right)+Det\left(C^{T}\cdot D\right)$ mit

$$A=\begin{pmatrix} x & 2 & 1 \\ 0 & 1 & x \\ -1 & 2x & 2 \end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3x \end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ x & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix}\quad F=\begin{pmatrix} -x & -4 & 3 \\ 0 & -1 & -3x \\ 5 & 4x & 8 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$Det\left(A+F\right)+Det\left(C^{T}\cdot D\right) \quad = \quad 18x-6x^{3} \quad = \quad 6x\left(3-x^{2}\right)$$

$NR:$

$$\begin{pmatrix} x & 2 & 1 \\ 0 & 1 & x \\ -1 & 2x & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -x & -4 & 3 \\ 0 & -1 & -3x \\ 5 & 4x & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2x \\ 4 & 6x & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Sarrus}]{\text{det}} 0+16x+0-0-0-0=16x$$

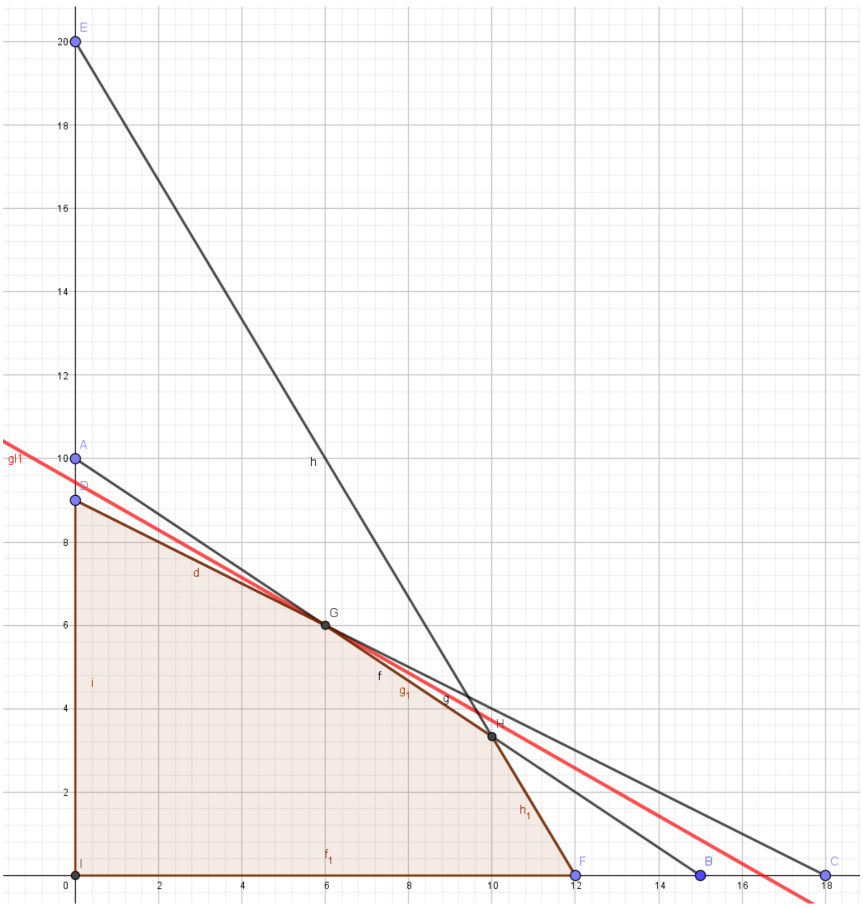
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ x & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 0 & 1-3x^{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{det}} 2x-6x^{3}-0\cdot\left(-1\right)=2x-6x^{3}$$

(6) Lineare Optimierung und Simplexalgorithmus

$$\begin{array}{llcl} (1) & 2x+3y & \leq & 30 \\ (2) & 3x+6y & \leq & 54 \\ (3) & 5x+3y & \leq & 60 \\ \hline ZF & f\left(x,y\right) & = & 8x+14y \rightarrow \max. \end{array}$$

Erstellen Sie die **graphische *und* die analytische** Lösung – Sie können hierfür gerne die Anlagen 1 und/oder 2 verwenden 😉

Lösung:



Simplex-Algorithmus:

$$\begin{array}{llcl} (1) & 2x+3y & \leq & 30 \\ (2) & 3x+6y & \leq & 54 \\ (3) & 5x+3y & \leq & 60 \\ \hline ZF & f(x,y) & = & 8x+14y \rightarrow \max. \end{array}$$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	
i	2	3	1	0	0	30	$30/3=10$
ii	3	6	0	1	0	54	$54/6=9 \rightarrow ii/6$
iii	5	3	0	0	1	60	$60/3=20$
ZF	8	14	0	0	0	Z	

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	
i	2	3	1	0	0	30	$i-3ii$
ii	0,5	1	0	$\frac{1}{6}$	0	9	
iii	5	3	0	0	1	60	$iii-3ii$
ZF	8	14	0	0	0	Z	$ZF-14ii$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	
i	0,5	0	1	$-0,5$	0	3	$3/0,5=6 \rightarrow ii \cdot 2$
ii	0,5	1	0	$\frac{1}{6}$	0	9	$9/0,5=18$
iii	3,5	0	0	$-0,5$	1	33	$33/\frac{7}{2}=\frac{66}{7}$
ZF	1	0	0	$-\frac{7}{3}$	0	$Z-126$	

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	
i	1	0	2	-1	0	6	
ii	0,5	1	0	$\frac{1}{6}$	0	9	$ii-0,5i$
iii	3,5	0	0	$-0,5$	1	33	$iii-3,5i$
ZF	1	0	0	$-\frac{7}{3}$	0	$Z-126$	$ZF-i$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b
i	1	0	2	-1	0	6
ii	0	1	-1	$\frac{2}{3}$	0	6
iii	0	0	-7	3	1	12
ZF	0	0	-2	$-\frac{4}{3}$	0	$Z-132$

$$\text{Lösung}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \text{mit } f_{\max}(6,6)=132$$