Klausur: Mathematik und Statistik

Lehrveranstaltung: Wirtschaftsmathematik

Fakultät für Wirtschaft

Studiengang: BWL-Öffentliche Wirtschaft-Wirtschaftsförderung Datum: 24.01.2022

Matrikelnummer:				**Dozent: Jürgen Meisel**	
Kurs: WOW21B		**Semester:**	1		
Hilfsmittel: Wiss. TR & Formelsammlung				**Bearbeitungszeit: 60 min.**	
Bewertung:	Maximale Punktzahl: 60			Erreichte Punktzahl:	
Prozente:	.....			Signum:	
Anmerkungen:	***Bitte bearbeiten Sie nur 5 der 6 Aufgabenstellungen.*** ***<u>Bitte beachten:</u>*** ***Falls Sie bei allen Aufgaben eine Bearbeitung bzw. Teilbearbeitung durchgeführt haben, müssen Sie eine Aufgabe für die Bewertung streichen.*** ***Sollte die Annullierung einer Aufgabe von Ihrer Seite nicht erfolgen, dann kommen die Aufgaben 1 bis 5 in die Wertung!***				

Nr	Thema der Aufgabe	max. Punkte	erreichte Punkte	Bemerkungen
1	**Matrizenrechnung: Rechentechnik**	**12**		
2	**Diff.-Rg I (mehrere Var.): Extrema ohne NB**	**12**		
3	**Diff.-Rg II (mehrere Var.): Extrema mit NB**	**12**		
4	**Ökonomische Anwendung zur Diff.-Rg. (1 Variable)**	**12**		
5	**Matrizenrechnung: Mehrstufige Produktion und Produktverflechtung**	**12**		
6	**Matrizenrechnung: Leontief-Modell**	**12**		
Summe		**60**		

(1) Rechentechnik zu Matrizen

Gegeben sind die Matrizen A und B: $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie die Ergebnisse der Ausdrücke

B^2-A^2 *und* $(B-A)\cdot(B+A)$

und erläutern Sie kurz, warum hier die 3. Binomische Formel nicht gilt.

Anmerkung:
Voraussetzung ist natürlich, dass Sie die Matrizenmultiplikation korrekt durchführen 😉

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix} \quad B^2-A^2 \quad und \quad (B-A)\cdot(B+A)$$

$$A^2=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 6\\ -9 & 10\end{pmatrix} \quad und$$

$$B^2=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -8\\ 0 & 9\end{pmatrix}$$

$$B-A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$

$$und \quad B+A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -3 & 7\end{pmatrix}$$

$$B^2-A^2=\begin{pmatrix}1 & -8\\ 0 & 9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5 & 6\\ -9 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -14\\ 9 & -1\end{pmatrix}$$

$$(B-A)\cdot(B+A)=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ -3 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & -28\\ 3 & -7\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}6 & -14\\ 9 & -1\end{pmatrix}$$

b) Welche Matrix müsste man anstelle A verwenden, damit die 3. Binomische Formel hier gelten würde?

Bitte mit kurzer Begründung.

Es könnte die Einheitsmatrix E, die Inverse zu B (=> B^{-1}) oder die formattechnisch korrekte Nullmatrix N verwendet werden;
denn diese sind ein neutrales Element bzgl. der Multiplikation
und es gilt hier dann das Kommutativgesetz - daraus folgt:

=> B*E = E*B = B ***=> B*N = N*B = N***

=> $B * B^{-1} = B^{-1} * B = E$

(2) Differentialrechnung I: Extrema ohne Nebenbedingung(en)

Ermitteln Sie die **beiden** stationären Stellen der Funktion

$$f(x,y,z) = \frac{1}{8}x^2 - 4x + y^3 - 12y + 4z^2 - 8z + xz$$

und untersuchen Sie **diese** auf ihre Extremwerteigenschaft.

Berechnen Sie den Funktionswert nur ***bei der Extremwertstelle*** 😉

$$f(x,y,z) = \frac{1}{8}x^2 - 4x + y^3 - 12y + 4z^2 - 8z + xz$$

$$f_x(x,y,z) = \frac{1}{4}x - 4 + z = 0 \quad \rightarrow \quad x = 16 - 4z$$

$$f_y(x,y,z) = 3y^2 - 12 = 0 \quad \rightarrow \quad y^2 = 4$$

$$f_z(x,y,z) = 8z - 8 + x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 8 - 8z$$

$$\rightarrow \quad z = -2 \quad \rightarrow \quad x = 24 \quad \rightarrow \quad y = \pm 2$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 & 1 \\ 0 & 6y & 0 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 & 1 \\ 0 & 6\cdot(-2) & 0 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 & 1 \\ 0 & (-12) & 0 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = 0,25 > 0 \qquad \textit{indefinit}$$

$$\xrightarrow{\textit{Auswertung}} \quad D_2 = (-12)\cdot 0,25 - 0\cdot 0 = (-3) < 0 \qquad \textit{kein Extremum}$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 & 1 \\ 0 & 6\cdot 2 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = 0,25 > 0 \qquad \textit{positiv definit}$$

$$\xrightarrow{\textit{Auswertung}} \quad D_2 = 12\cdot 0,25 - 0\cdot 0 = 3 > 0 \qquad \rightarrow$$

$$D_3 = 12\cdot 0,25\cdot 8 - 1\cdot 12\cdot 1 = 12 > 0 \qquad \textit{Min}(24,2,-2) = -56$$

(3) Differentialrechnung II: Extrema mit Nebenbedingungen

Gegeben sei folgende Produktionsfunktion: $f(x,y) = 8 \cdot x^{0,75} \cdot y^{0,25}$

Eine Mengeneinheit für **x kostet 9,00 GE**, der Preis für eine Mengeneinheit von **y liegt bei 6,00 GE**.

Insgesamt steht ein Budget von **b = 2.400** GE zur Verfügung.

a) Bestimmen Sie das optimale Produktionsprogramm mit Hilfe des Lagrangeansatzes.

b) Welchen Wert besitzt der Lagrangeparameter im Maximumfall und welche ökonomische Aussage kann hier getroffen werden, wenn sich das Budget b um **10** GE erhöht?

$$L(x,y,\lambda) = 8 \cdot x^{0,75} \cdot y^{0,25} + \lambda(2.400 - 9x - 6y)$$

$$L_x(x,y,\lambda) = 6 \cdot \frac{y^{0,25}}{x^{0,25}} - 9\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{6}{9} \cdot \frac{y^{0,25}}{x^{0,25}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{y^{0,25}}{x^{0,25}} = \lambda$$

$$L_y(x,y,\lambda) = 2 \cdot \frac{x^{0,75}}{y^{0,75}} - 6\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{2}{6} \cdot \frac{x^{0,75}}{y^{0,75}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{0,75}}{y^{0,75}} = \lambda$$

$$\xrightarrow{Gleichsetzen} \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{y^{0,25}}{x^{0,25}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{0,75}}{y^{0,75}} \quad \rightarrow \quad y = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot x \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x$$

$$\xrightarrow[in\ NB]{Austauschverhältnis} \quad 2.400 = 9x + 6 \cdot 0,5x \quad \rightarrow \quad 2.400 = 12x \quad \rightarrow \quad x = 200$$

$$\rightarrow \quad y = 0,5x \quad \rightarrow \quad y = 100$$

$$\rightarrow \quad f(200/100) = 8 \cdot 200^{0,75} \cdot 100^{0,25} = 1.345,43$$

$$\lambda = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{0,75}}{y^{0,75}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{200^{0,75}}{100^{0,75}} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{200}{100}\right)^{0,75} = \frac{1}{3} \cdot 2^{0,75} = 0,5606$$

$$\rightarrow \quad \lambda = 0,5606 \quad \xrightarrow{b=+10} \quad \Delta f = 0,5606 \cdot 10 \approx 5,606$$

$$f_{neu} \quad = \quad 1.345,43 + 5,606 \quad = \quad 1.351,036$$

(4) Ökonomische Anwendung zur Differentialrechnung mit einer Variablen

Der Unternehmer Kuno Storchenfuß agiert mit der Umsatz-Funktion

$$u(x) = -4x^3 + 140x^2 + 500x \,.$$

Die Gesamtkosten der Produktion belaufen sich nach eingehenden Analysen auf

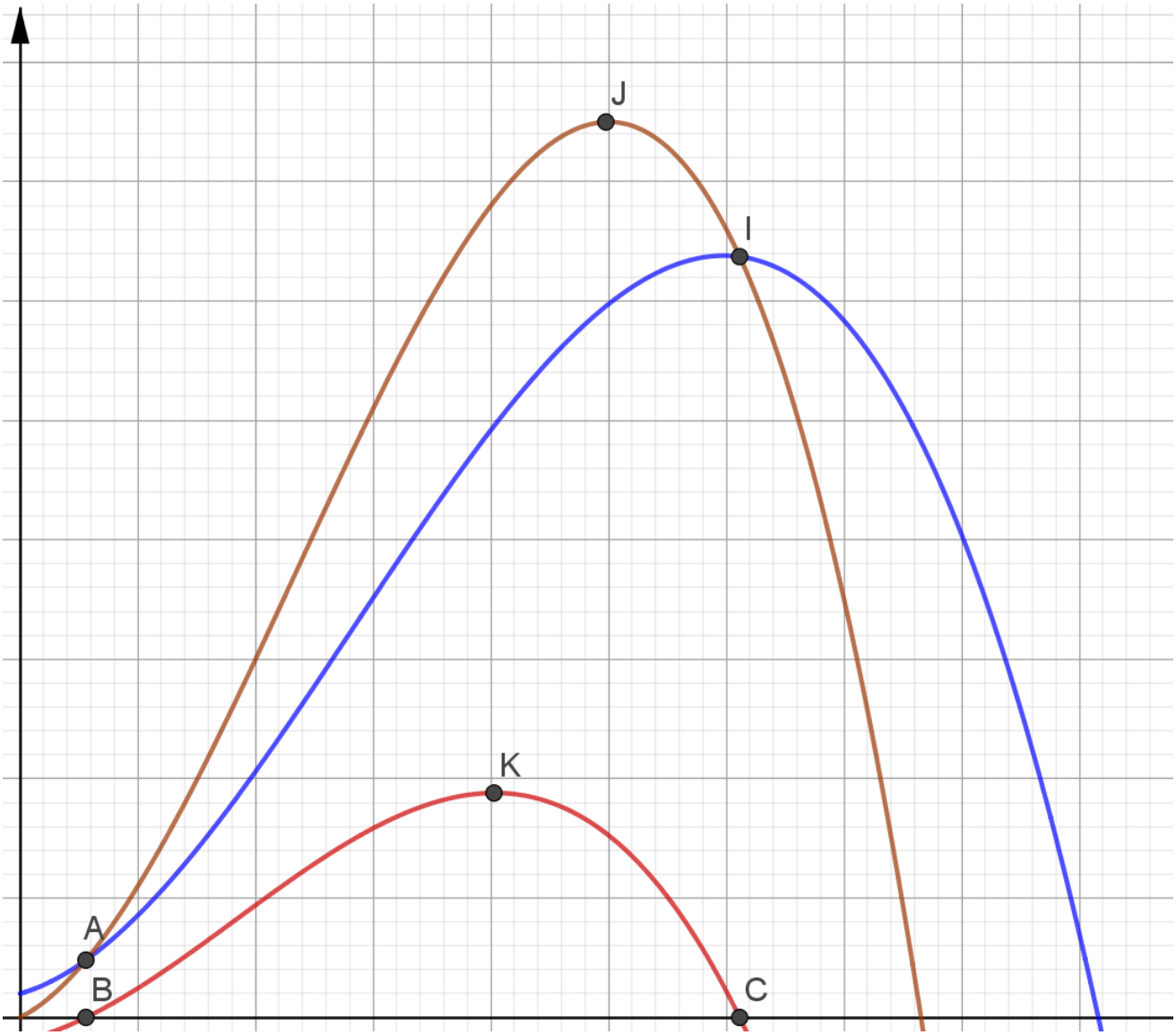
$$K_{ges}(x) = \left(\vec{k}_{ges}\right)^T \cdot \vec{m}_x + K_{fix}$$

$$\vec{m}_x = \begin{pmatrix} 60x \\ 4x^2 - 0{,}1x^3 \\ x^2 + 8x \end{pmatrix} \quad \text{mit } x_{Def} \in [0\,;\,50] \quad \text{und} \quad \vec{k}_{ges} = \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad K_{fix} = 1.000$$

Die hergestellte Menge x wird auch komplett zur jeweiligen Preis-Absatz-Funktion p(x) abgesetzt.

⇨ beschriften Sie Skalen des Koordinatensystems und die drei Funktionen

⇨ berechnen Sie die Koordinaten der angezeigten Punkte und benennen Sie diese mit geeigneten Fachbegriffen



$$K_{ges}(x) = \left(\vec{k}_{ges}\right)^T \cdot \vec{m}_x + K_{fix}$$

$$\vec{m}_x = \begin{pmatrix} 60x \\ 4x^2 - 0{,}1x^3 \\ x^2 + 8x \end{pmatrix} \quad \text{mit } x_{Def} \in [0;50] \quad \text{und} \quad \vec{k}_{ges} = \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad K_{fix} = 1.000$$

$$K_{ges}(x) = \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 64x \\ 8x^2 - 0{,}2x^3 \\ x^2 + 10x \end{pmatrix} + 1000 = \begin{pmatrix} 4 & 20 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60x \\ 4x^2 - 0{,}1x^3 \\ x^2 + 8x \end{pmatrix} + 1000$$

$$K_{ges}(x) = \begin{pmatrix} 4 & 20 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60x \\ 4x^2 - 0{,}1x^3 \\ x^2 + 8x \end{pmatrix} + 1000 = 4 \cdot 60x + 20 \cdot 4x^2 - 20 \cdot 0{,}1x^3 + 5 \cdot x^2 + 5 \cdot 8x + 1000$$

$$K_{ges}(x) = 240x + 80x^2 - 2x^3 + 5x^2 + 40x + 1000 = -2x^3 + 85x^2 + 280x + 1000$$

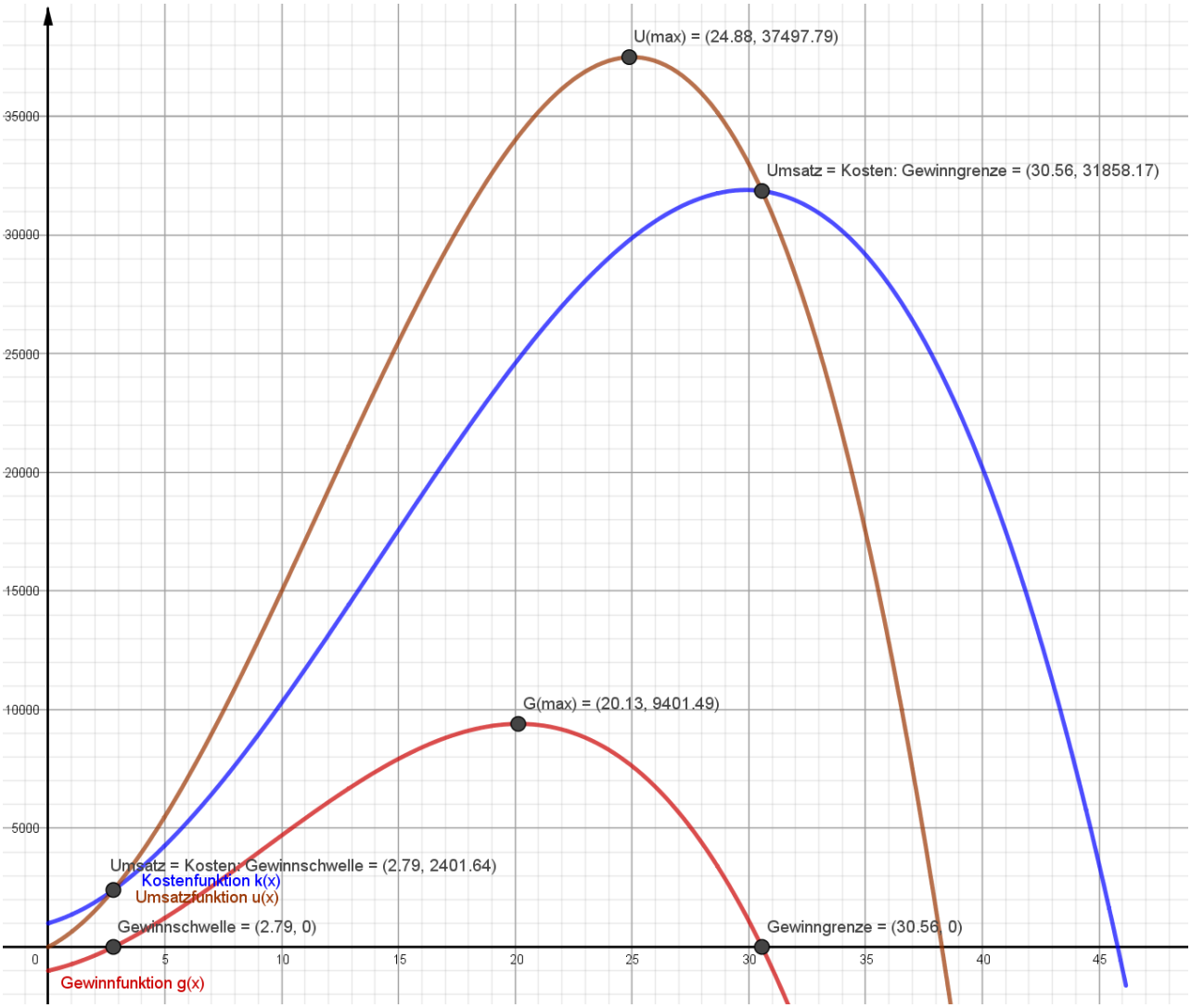
$$u(x) = -4x^3 + 140x^2 + 500x$$

Gewinnfunktion :

$$g(x) = u(x) - k(x)$$

$$g(x) = -4x^3 + 140x^2 + 500x - \left(-2x^3 + 85x^2 + 280x + 1000\right)$$

$$g(x) = -4x^3 + 140x^2 + 500x + 2x^3 - 85x^2 - 280x - 1000 = -2x^3 + 55x^2 + 220x - 1000$$



(5) Matrizenrechnung: Mehrstufige Produktion und Produktverflechtung

Ein Betrieb produziert aus den drei Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die drei Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 und daraus die drei Endprodukte E_1, E_2 und E_3.
Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) ist den Tabellen zu entnehmen.

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	12	20	15
R_2	18	y	20
R_3	10	20	x

	E_1	E_2	E_3
Z_1	a	4	3
Z_2	b	2	1
Z_3	c	3	2

	E_1	E_2	E_3
R_1	99	?	?
R_2	146	?	124
R_3	94	122	?

a) Bestimmen Sie die fehlenden **?-Werte** und die Werte für die Variablen **x, y** und **a, b und c,** wobei gelten soll, dass alle Werte ganzzahlig und positiv sind.

$$\begin{pmatrix} 12 & 20 & 15 \\ 18 & y & 20 \\ 10 & 20 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 4 & 3 \\ b & 2 & 1 \\ c & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12a+20b+15c & 133 & 86 \\ by+18a+20c & 2y+132 & y+94 \\ cx+10a+20b & 3x+80 & 2x+50 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{Koeffizientenvergleich}} \begin{pmatrix} 99 & u & v \\ 146 & w & 124 \\ 94 & 122 & k \end{pmatrix}$$

$u = 133 \quad und \quad v = 86$

$y + 94 = 124 \quad \rightarrow \quad y = 30$

$3x + 80 = 122 \quad \rightarrow \quad 3x = 42 \quad \rightarrow \quad x = 14$

$2x + 50 = k \quad \rightarrow \quad 2 \cdot 14 + 50 = k \quad \rightarrow \quad k = 78$

LGS:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 12a+20b+15c & & & 99 \\ 30b+18a+20c & & & 146 \\ 14c+10a+20b & & & 94 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{ordnen}]{\text{Koeffizienten}} \left(\begin{array}{ccc|c} 12a+20b+15c & & & 99 \\ 18a+30b+20c & & & 146 \\ 10a+20b+14c & & & 94 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Lösung}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gehen Sie nun unabhängig von den Ergebnissen in a) von folgender Matrix

$$M_{RE} = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 12 \\ 8 & 10 & 6 \\ 14 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$ **aus.**

b) Es ist folgender Vorrat an Rohstoffen vorhanden: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1.880 \\ 1.240 \\ 1.740 \end{pmatrix}$

Wie viele **Endprodukte** können hergestellt werden, wenn das Lager danach vollständig leer sein soll?

$$M_{RE} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \vec{r} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 10 & 15 & 12 \\ 8 & 10 & 6 \\ 14 & 12 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.880 \\ 1.240 \\ 1.740 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \\ 40 \end{pmatrix}$$

c) Gesucht ist jetzt die notwendige Mindestmenge an Rohstoffen, wenn eine Bestellung von Endprodukten im **Verhältnis $E_1 : E_2 : E_3$ => 1 : 3 : 4** realisiert werden soll und **bereits 310 ME von R_2** vorrätig sind.
Weitere Zukäufe von R_2 sollen keine erfolgen.

$$M_{RE} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \vec{r} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 10 & 15 & 12 \\ 8 & 10 & 6 \\ 14 & 12 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 3x \\ 4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ 310 \\ r_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 103x \\ 62x \\ 82x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ 310 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Zeile\ 2} \quad x = 5 \quad \rightarrow \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ 310 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 103x \\ 62x \\ 82x \end{pmatrix} \overset{x=5}{=} \begin{pmatrix} r_1 \\ 310 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 515 \\ 310 \\ 410 \end{pmatrix} = \vec{r}$$

(6) Matrizenrechnung: Leontief-Modell

Die Verflechtung dreier Werke A, B und C eines Pharmaunternehmens untereinander und mit dem Markt wird durch das Leontief-Modell beschrieben.

a) Dazu ist folgende (unvollständige) Input-Output-Tabelle gegeben:

	A	B	C	Konsum	Produktion
A	5	14	9	$y_1 = 22$	$x_1 =$
B	15	7	(k)	$y_2 = (7k)$	$x_2 = 70$
C	10	$(7g)$	(g)	$y_3 = 26$	$x_3 = (20g)$

Vervollständigen Sie die Tabelle mit den korrekten Werten und bestimmen Sie die Technologiematrix T.

	A	B	C	Konsum	Produktion
A	5	14	9	$y_1 = 22$	$x_1 = 50$
B	15	7	$(k = 6)$	$y_2 = 7k = 42$	$x_2 = 70$
C	10	$7g = 21$	$g = 3$	$y_3 = 26$	$x_3 = 20g = 60$

b) Für den kommenden Zeitraum wird mit dem Marktvektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 120 \\ 205 \end{pmatrix}$ gerechnet.

Bestimmen Sie den neuen zugehörigen Produktionsvektor $\vec{x}$.

$$T = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,15 \\ 0,3 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,05 \end{pmatrix} \quad und \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 120 \\ 205 \end{pmatrix}$$

$$T \cdot \vec{x} + \vec{y} = \vec{x} \rightarrow \vec{y} = \vec{x} - T \cdot \vec{x} \rightarrow \vec{y} = (E - T) \cdot \vec{x}$$

$$Lösung\ per\ LGS: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

$$Lösung\ per\ Leontief - Inverse: \rightarrow \vec{x} = (E - T)^{-1} \cdot \vec{y} \rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

c) Zukünftig soll die Produktion der Werke A, B und C auf das Verhältnis

$x_1 : x_2 : x_3 = 8 : 7 : 5$ umgestellt

und **insgesamt 380 ME** an den Markt abgegeben werden.

Berechnen Sie die **Marktabgabe** $\vec{y}$ aus den drei Zweigwerken A, B und C.

$$T = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,15 \\ 0,3 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,05 \end{pmatrix} \quad und \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 8x \\ 7x \\ 5x \end{pmatrix}$$

$$T \cdot \vec{x} + \vec{y} = \vec{x} \rightarrow \vec{y} = \vec{x} - T \cdot \vec{x} \rightarrow \vec{y} = (E - T) \cdot \vec{x}$$

$$\rightarrow \vec{y} = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,2 & -0,15 \\ -0,3 & 0,9 & -0,1 \\ -0,2 & -0,3 & 0,95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8x \\ 7x \\ 5x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,05x \\ 3,40x \\ 1,05x \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[|y| = 380]{\text{Gesamtabgabe}} 380 = 9,5x \rightarrow x = 40 \rightarrow \vec{y} = \begin{pmatrix} 202 \\ 136 \\ 42 \end{pmatrix}$$