Klausur: Mathematik
am Donnerstag, den 03. Januar 2008

Jürgen Meisel
FH Ludwigshafen

Zugelassene Hilfsmittel: nicht progr. Taschenrechner
Bearbeitungszeit: **120 Minuten**

1.) **Berechnen mathematischer Ausdrücke**

a) Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Summenausdrucks:

$$\sum_{t=11}^{50}(3t)$$

Lösung:

$$\sum_{t=11}^{50}(3t) = 3\cdot\left(\sum_{i=1}^{50} t - \sum_{i=1}^{10} t\right) = 3\cdot\left(\frac{50\cdot 51}{2} - \frac{10\cdot 11}{2}\right) = 3\cdot(1.275-55) = 3.660$$

b) Bilden Sie die Entwicklung nach dem Binomischen Lehrsatz
und vereinfachen Sie den Ausdruck so weit wie möglich:

$$(2x+3)^5$$

Lösung:

$$\begin{aligned}(2x+3)^5 &= \binom{5}{0}(2x)^5\cdot 3^0 + \binom{5}{1}(2x)^4\cdot 3^1 + \binom{5}{2}(2x)^3\cdot 3^2 \\ &\quad + \binom{5}{3}(2x)^2\cdot 3^3 + \binom{5}{4}(2x)^1\cdot 3^4 + \binom{5}{5}(2x)^0\cdot 3^5 \\ (2x+3)^5 &= 32x^5 + 240x^4 + 720x^3 + 1.080x^2 + 810x + 243\end{aligned}$$

c) Für welche Werte von $a \in \Re$ ist die Matrix invertierbar?

$$Det\begin{pmatrix} 2 & 4 & a \\ a & 3 & 1 \\ 4 & -2 & -3a \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$Det(A) \quad = \quad Det\begin{pmatrix} 2 & 4 & a \\ a & 3 & 1 \\ 4 & -2 & -3a \end{pmatrix} \quad = \quad -18a+16-2a^2-12a+4+12a^2$$

$$\Rightarrow \quad 10a^2-30a+20 \quad = \quad 0 \quad \Rightarrow \quad a_{1/2} \quad = \quad \frac{30 \pm \sqrt{900-800}}{20} \quad = \quad \frac{30 \pm 10}{20}$$

$$\Rightarrow \quad a_1 \quad = \quad 2 \quad \wedge \quad a_2 \quad = \quad 1$$

$$\Rightarrow \quad Det(A) \quad invertierbar \quad \Leftrightarrow \quad a \in \Re \setminus \{1;2\}$$

2.) **Kurvendiskussion**

Gegeben sei die Funktionenschar $f_k(x)$ mit der Vorschrift

$$f_k(x) = x^4 - kx^3 \qquad mit \quad k > 0$$

a) Zeigen Sie, dass bei der Funktionenschar ein Wendepunkt mit einer der Nullstellen übereinstimmt und ein weiterer Wendepunkt zwischen den beiden Nullstellen liegt.

Lösung:

$$Nullstellen: \quad f_k(x) = x^3(x-k) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = k$$

$$Wendepunkt(e):$$

$$\left[f_k'(x) = 4x^3 - 3kx^2 \right] \qquad f_k''(x) = 12x^2 - 6kx \qquad f_k'''(x) = 24x - 6k$$

$$f_k''(x) = 6x(2x-k) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = \frac{k}{2}$$

$$f_k'''(0) = -6k \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W_1(0 \mid 0)$$

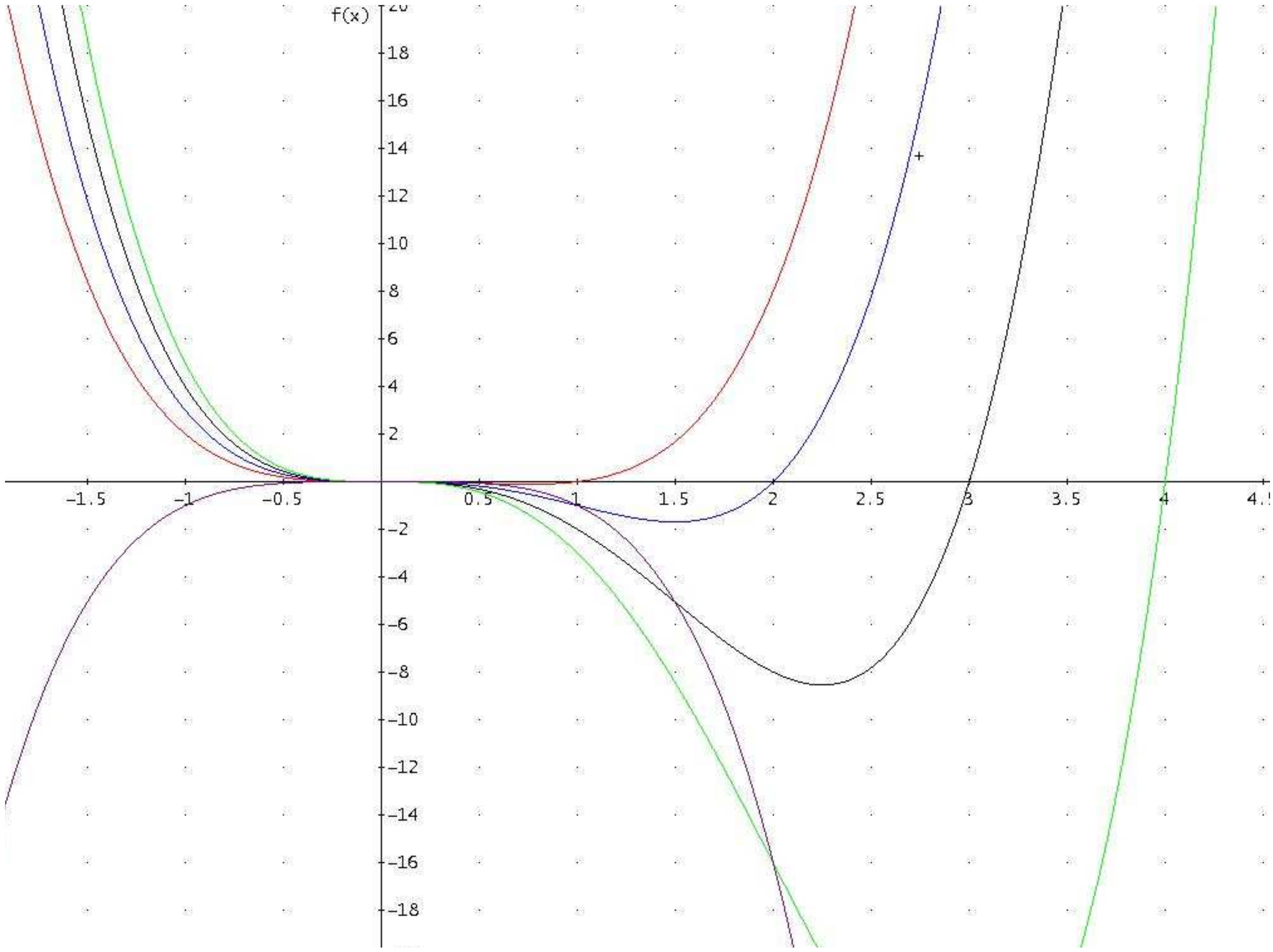
$$f_k'''\left(\frac{k}{2}\right) = 6k \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W_2\left(\frac{k}{2} \,\middle|\, -\frac{k^4}{16}\right)$$

Ergebnis: W_1 und N_1 haben gleichen x-Wert; W_2 liegt mit $x_2 = \frac{k}{2}$ genau auf halber Strecke zwischen 0 und k.

b) Berechnen Sie die Ortskurve der Wendepunkte.

Lösung:

$$W_2\left(\frac{k}{2} \,\middle|\, -\frac{k^4}{16}\right) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{k}{2} \quad \Rightarrow \quad k = 2x \quad \xrightarrow{einsetzen} \quad y = -\frac{(2x)^4}{16} = -x^4$$



3.) **Ökonomische Anwendungen**

Gegeben ist die Nachfragefunktion $p_N(x) = -0{,}16x + 5{,}3$

und die Kostenfunktion $k(x) = 0{,}04x^3 - 0{,}6x^2 + 5{,}5x + 2$.

a) Bestimmen Sie das Erlösmaximum.

Lösung:

$$e(x) = x \cdot p_N(x)$$

$$\Rightarrow \quad e(x) = x \cdot (-0{,}16x + 5{,}3) = -0{,}16x^2 + 5{,}3x$$

$$\Rightarrow \quad e'(x) = -0{,}32x + 5{,}3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 16{,}56$$

$$\Rightarrow \quad e''(x) = -0{,}32 < 0 \quad \Rightarrow \quad Max(16{,}56 \mid 43{,}9)$$

b) (i) Zeigen Sie, dass die Gewinngrenze bei x = 10 liegt.

(ii) Ermitteln Sie nun noch die Gewinnschwelle.

Lösung:

$$g(x) = x \cdot p_N(x) - k(x)$$

$$\Rightarrow \quad g(x) = x \cdot (-0{,}16x + 5{,}3) - \left(0{,}04x^3 - 0{,}6x^2 + 5{,}5x + 2\right)$$

$$\Rightarrow \quad g(x) = -0{,}04x^3 + 0{,}44x^2 - 0{,}2x - 2$$

$$\Rightarrow \quad g(10) = -0{,}04 \cdot (10)^3 + 0{,}44 \cdot (10)^2 - 0{,}2 \cdot 10 - 2 = 0$$

Polynomdivision mit (x-10) oder Horner-Schema:

	f(x) =	-,04 x³	,44 x²	-,20 x	-2,00
x0	a(3)	a(2)	a(1)	a(0)	
	-0,04	0,44	-0,20	-2,00	
10		-0,40	0,40	2,000	
	-0,04	0,04	0,20	0,000	f(x0)

$$\Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{-0{,}04 \pm \sqrt{0{,}0016 + 0{,}032}}{-0{,}08} = \frac{-0{,}04 \pm 0{,}18}{-0{,}08}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = -1{,}79 \quad \wedge \quad x_2 = 2{,}79$$

Gewinnschwelle: $x_2 = 2{,}79$

c) Berechnen Sie nun den Cournot-Punkt.

Lösung:

$$g(x) = x \cdot p_N(x) - k(x)$$

$$\Rightarrow \quad g(x) = x \cdot (-0{,}16x + 5{,}3) - \left(0{,}04x^3 - 0{,}6x^2 + 5{,}5x + 2\right)$$

$$\Rightarrow \quad g(x) = -0{,}04x^3 + 0{,}44x^2 - 0{,}2x - 2$$

$$\Rightarrow \quad g'(x) = -0{,}12x^2 + 0{,}88x - 0{,}2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{-0{,}88 \pm \sqrt{0{,}7744 - 0{,}096}}{-0{,}24} = \frac{-0{,}88 \pm 0{,}8236}{-0{,}24}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0{,}235 \quad \wedge \quad x_2 = 7{,}1$$

$$\Rightarrow \quad g''(x) = -0{,}24x + 0{,}88$$

$$\Rightarrow \quad g''(0{,}235) = -0{,}24 \cdot 0{,}235 + 0{,}88 = 0{,}8236 > 0 \quad \Rightarrow \quad Min$$

$$\Rightarrow \quad g''(7{,}1) = -0{,}24 \cdot 7{,}1 + 0{,}88 = -0{,}824 < 0 \quad \Rightarrow \quad Max(7{,}1 \mid 4{,}444)$$

$$p_N(7{,}1) = -0{,}16 \cdot 7{,}1 + 5{,}3 = 4{,}164 \quad \Rightarrow \quad C(7{,}1 \mid 4{,}164)$$

Zusätzlich sei nun auch noch die Angebotsfunktion durch

$p_A(x) = 0{,}1x^2 + 0{,}2x + 1$ gegeben.

d) Wo liegt das Marktgleichgewicht?

e) Bestimmen Sie die Konsumentenrente für x = 5.

Lösung:

$$Marktgleichgewicht: \quad p_N(x) = p_A(x) \quad \Rightarrow \quad -0{,}16x + 5{,}3 = 0{,}1x^2 + 0{,}2x + 1$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}1x^2 + 0{,}36x - 4{,}3 = 0$$

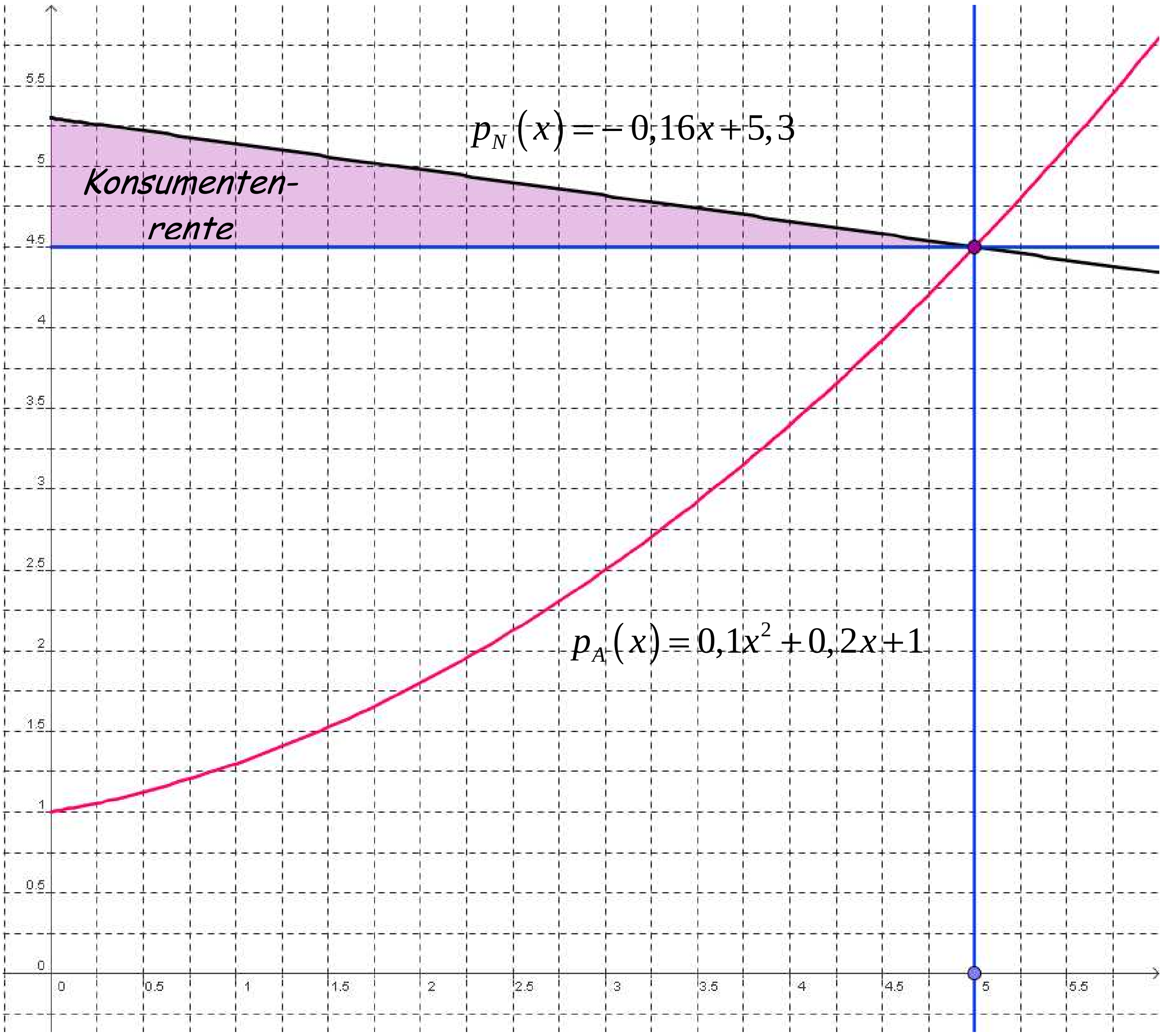
$$\Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{-0{,}36 \pm \sqrt{0{,}1296 + 1{,}72}}{0{,}2} = \frac{-0{,}36 \pm 1{,}36}{0{,}2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 5 \quad \wedge \quad x_2 = -8{,}6$$

$$\Rightarrow \quad M(5 \mid 4{,}5)$$

$$Konsumentenrente: \quad K_R = \int_0^{x_0} p_N(x)\,dx - p_N(x_0) \cdot x_0$$

$$\Rightarrow \quad K_R = \int_0^5 (-0{,}16x + 5{,}3)\,dx - 4{,}5 \cdot 5 = \left[-\frac{8}{100}x^2 + 5{,}3x\right]_0^5 - 22{,}5$$

$$\Rightarrow \quad K_R = (-2 + 26{,}5) - 22{,}5 = 2$$



4.) **Optimum ohne Nebenbedingungen**

Ermitteln Sie die 3 stationären Stellen der Funktion

$$f\left(x,y\right)=5-x^2+2xy-y^4$$

und untersuchen Sie diese Stellen auf ihre Extremwerteigenschaft.

<u>Lösung:</u>

$$f\left(x,y\right)=5-x^2+2xy-y^4$$

$$I.)\quad \frac{\partial f}{\partial x}\left(x,y\right)=-2x+2y\overset{!}{=}0 \quad\Rightarrow\quad x=y$$

$$II.)\quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(x,y\right)=2x-4y^3\overset{!}{=}0 \quad\Rightarrow\quad 2y-4y^3=0 \quad\Rightarrow\quad 2y\left(1-2y^2\right)=0 \quad\Rightarrow\quad y_1=0\wedge y_{2/3}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Es resultieren 3 stationäre Stellen:

$$S_1\left(0\mid 0\mid 5\right)\quad\wedge\quad S_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\middle|\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\middle|\,5\frac{1}{4}\right)\quad\wedge\quad S_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\middle|\,-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\middle|\,5\frac{1}{4}\right)$$

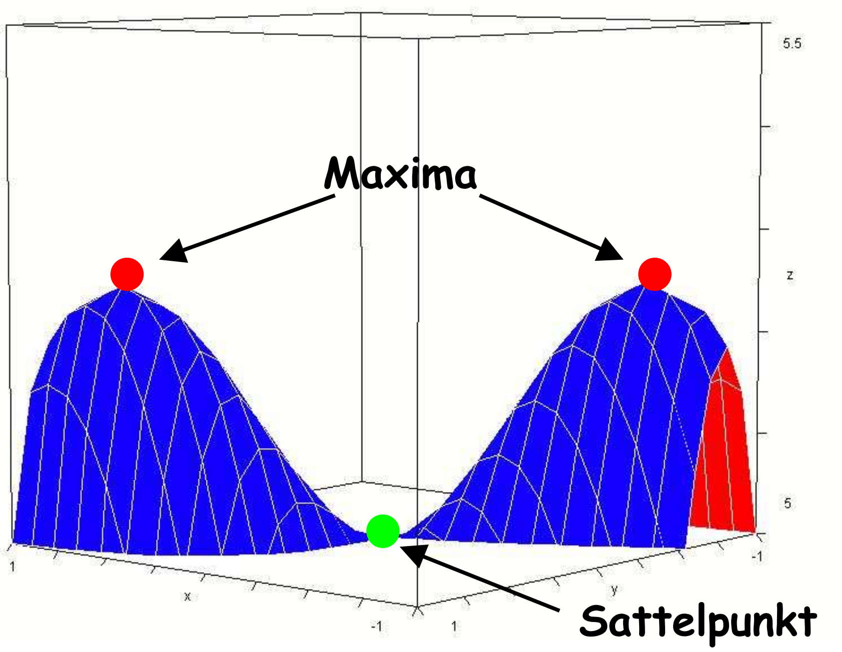
$$Hesse-Matrix:$$

$$H\left(f\right)=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & -12y^2\end{pmatrix}\xrightarrow{S_i\ einsetzen}$$

$$H\left(f_{S_1}\left(0\mid 0\right)\right)=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\det\left(H\right)<0\quad\Rightarrow\quad Sattelpunkt$$

$$H\left(f_{S_2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\middle|\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & -6\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\det\left(H\right)>0\quad\wedge\quad f_{xx}<0\quad\Rightarrow\quad Max\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\middle|\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\middle|\,5\frac{1}{4}\right)$$

$$H\left(f_{S_3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\middle|\,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & -6\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\det\left(H\right)>0\quad\wedge\quad f_{xx}<0\quad\Rightarrow\quad Max\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\middle|\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\middle|\,5\frac{1}{4}\right)$$



5.) **Optimum mit Nebenbedingungen**

Student Rudi Clever befindet sich in intensiver Klausurvorbereitung.

Dabei ernährt er sich u.a. von **W**(asser) und **E**(rdnüssen).

Die Effizienz seiner Vorbereitungsbemühungen gestaltet sich gemäß folgender Funktion: $f(W,E) = 4W^{0,7} \cdot E^{0,3}$

Ein Wasser kostet 50 ct., ein Beutel Erdnüsse kostet 80 ct.

Er möchte pro Woche nicht mehr als 10,00 € investieren.

Wie viel Wasser und welche Beutelanzahl an Erdnüssen sollte er pro Woche verbrauchen, um eine optimale Prüfungsvorbereitung zu garantieren?

Lösung:

$$L(W,E,\lambda) = 4W^{0,7} \cdot E^{0,3} + \lambda(10 - 0,5W - 0,8E)$$

$$\frac{\partial L}{\partial W}(W,E,\lambda) = 2,8\frac{E^{0,3}}{W^{0,3}} - 0,5\lambda \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda = 5,6 \cdot \frac{E^{0,3}}{W^{0,3}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial E}(W,E,\lambda) = 1,2\frac{W^{0,7}}{E^{0,7}} - 0,8\lambda \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda = 1,5 \cdot \frac{W^{0,7}}{E^{0,7}}$$

$$\textit{Austauschverhältnis}:$$

$$5,6 \cdot \frac{E^{0,3}}{W^{0,3}} = 1,5 \cdot \frac{W^{0,7}}{E^{0,7}} \Rightarrow W = \frac{56}{15}E$$

$$\textit{eingesetzt in NB}:$$

$$10 = 0,5W + 0,8E \xrightarrow{W = \frac{56}{15}E} 10 = \frac{1}{2} \cdot \frac{56}{15}E + \frac{4}{5}E$$

$$\Rightarrow 10 = \frac{8}{3}E \Rightarrow E = 3,75 \Rightarrow W = 14$$

6.) **Ökonomische Anwendungen zu Matrizen**

Gegeben seien die Matrizen $M_{RZ} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $M_{ZE} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

Die Rohstoffkosten betragen $\vec{k}_R = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, die Kosten für die Zwischenproduktion

$\vec{k}_Z = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und die Kosten für die Endproduktherstellung $\vec{k}_E = \begin{pmatrix} 12 \\ 14 \\ 8 \end{pmatrix}$

a) Wie viele Rohstoffe werden für je eine Mengeneinheit der Endprodukte benötigt?

Lösung:

$$M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 30 & 22 \\ 18 & 17 & 21 \\ 20 & 22 & 14 \end{pmatrix}$$

b) Wie viele Rohstoffe müssen für einen Auftrag von 20 E_1, 10 E_2 und 10 E_3 im Lager vorrätig sein?

Lösung:

$$M_{RE} \cdot \vec{e} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 28 & 30 & 22 \\ 18 & 17 & 21 \\ 20 & 22 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.080 \\ 740 \\ 760 \end{pmatrix}$$

c) Wir haben einen Rohstoffvorrat von $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1.540 & 1.150 & 1.060 \end{pmatrix}$.

Wie viele Endprodukte können damit hergestellt werden, wenn danach das Lager leer sein soll.

Lösung:

$$Ansatz: \quad M_{RE} \cdot \vec{x} = \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 28 & 30 & 22 \\ 18 & 17 & 21 \\ 20 & 22 & 14 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1.540 \\ 1.150 \\ 1.060 \end{pmatrix}$$

Lösung mittels Gauss-Verfahren:

$28\,x_1 + 30\,x_2 + 22\,x_3 = 1540$ (1)
$18\,x_1 + 17\,x_2 + 21\,x_3 = 1150$ (2)
$20\,x_1 + 22\,x_2 + 14\,x_3 = 1060$ (3)

$x_1 + 15/14\,x_2 + 11/14\,x_3 = 55$ (1)
$18\,x_1 + 17\,x_2 + 21\,x_3 = 1150$ (2)
$20\,x_1 + 22\,x_2 + 14\,x_3 = 1060$ (3)

$x_1 + 15/14\,x_2 + 11/14\,x_3 = 55$ (1)
$-16/7\,x_2 + 48/7\,x_3 = 160$ (2)
$20\,x_1 + 22\,x_2 + 14\,x_3 = 1060$ (3)

$x_1 + 15/14\,x_2 + 11/14\,x_3 = 55$ (1)
$-16/7\,x_2 + 48/7\,x_3 = 160$ (2)
$4/7\,x_2 - 12/7\,x_3 = -40$ (3)

$x_1 + 15/14\,x_2 + 11/14\,x_3 = 55$ (1)
$x_2 - 3\,x_3 = -70$ (2)
$4/7\,x_2 - 12/7\,x_3 = -40$ (3)

$x_1 + 4\,x_3 = 130$ (1)
$x_2 - 3\,x_3 = -70$ (2)
$4/7\,x_2 - 12/7\,x_3 = -40$ (3)

$x_1 + 4\,x_3 = 130$ (1)
$x_2 - 3\,x_3 = -70$ (2)
$0 = 0$ (3)

Unendlich viele Lösungen: 1 Parameter wählbar
$x_1 = 130 - 4\,x_3$
$x_2 = -70 + 3\,x_3$
x_3 beliebig wählbar

Bereich für x_3 bestimmen:

$$\Rightarrow \quad 130 - 4x_3 \geq 0 \quad \wedge \quad -70 + 3x_3 \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad x_3 \leq 32{,}5 \quad \wedge \quad x_3 \geq \frac{70}{3} = 23\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x_3 \in \left[23\frac{1}{3}\,;\,32\frac{1}{2}\right]$$

d) Bestimmen Sie die variablen Kosten pro Endprodukt.

Lösung:

$$Ansatz: \quad \vec{k}_R \cdot M_{RE} + \vec{k}_Z \cdot M_{ZE} \cdot \vec{k}_E = \vec{k}_{var}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 28 & 30 & 22 \\ 18 & 17 & 21 \\ 20 & 22 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 7 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 14 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 222 & 231 & 197 \end{pmatrix}$$

7.) **Lineare Optimierung und Simplexalgorithmus**

Erstellen Sie aus der folgenden Situation die drei Nebenbedingungen und die Zielfunktion.

Ein Landwirt verkauft Hühner und Enten. Er kann monatlich von beiden Tierarten zusammen höchstens 30 Tiere verkaufen; von den Enten höchstens 15.

Die Futtermittelkosten zur Aufzucht eines Huhnes betragen 1 Euro; für eine Ente 2 Euro. Die Kosten sollen höchstens 40 Euro betragen.

Das Huhn wird für 12 Euro und die Ente für 18 Euro verkauft.

Gesucht ist der maximale Verkaufserlös.

Lösung:

Bedingungen: *x = Anzahl der Hühner und y = Anzahl der Enten*

$$
\begin{array}{lcl}
x+y & \leq & 30 \\
x+2y & \leq & 40
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\mathit{Nichtnegativitätsbedingungen:} \\
x \;\geq\; 0 \quad \mathit{und} \quad y \;\geq\; 0 \\
\mathit{Obergrenzen:} \\
y \;\leq\; 15
\end{array}
$$

Zielfunktion: $12x + 18y = Z \rightarrow \max.$

8.) **Lineare Optimierung und Simplexalgorithmus**

Bedingungen: **x = Anzahl der Produkte P_1 y = Anzahl der Produkte P_2**

$$
\begin{array}{lcl}
15x+30y & \leq & 450 \\
25x+20y & \leq & 480
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\mathit{Nichtnegativitätsbedingungen:} \\
x \;\geq\; 0 \quad \mathit{und} \quad y \;\geq\; 0
\end{array}
$$

Zielfunktion: $40x + 60y = Z \rightarrow \max.$

a) Bestimmen Sie graphisch das Maximum.

b) Bestimmen Sie das Maximum mit Hilfe des Simplexalgorithmus.

Lösung:

Simplexalgorithmus

$$
\begin{array}{lcccc|c}
 & x & y & u_1 & u_2 & b \\
I.) & 15 & 30 & 1 & 0 & 450 \xrightarrow{\frac{1}{30}\cdot I.)} \\
II.) & 25 & 20 & 0 & 1 & 480 \\
\hline
U: & 40 & 60 & 0 & 0 & Z
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcccc|c}
I.) & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{30} & 0 & 15 \\
II.) & 25 & 20 & 0 & 1 & 480 \xrightarrow{II.)-20\cdot I.)} \\
\hline
U: & 40 & 60 & 0 & 0 & Z \xrightarrow{U-60\cdot I.)}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcccc|c}
I.) & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{30} & 0 & 15 \\
II.) & 15 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 180 \xrightarrow{\frac{1}{15}\cdot II.)} \\
\hline
U: & 10 & 0 & -2 & 0 & Z-900
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcccc|c}
I.) & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{30} & 0 & 15 \xrightarrow{I.)-\frac{1}{2}\cdot II.)} \\
II.) & 1 & 0 & -\frac{2}{45} & \frac{1}{15} & 12 \\
\hline
U: & 10 & 0 & -2 & 0 & Z-900 \xrightarrow{U-10\cdot II.)}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcccc|c}
I.) & 0 & 1 & \frac{1}{18} & -\frac{1}{30} & 9 \\
II.) & 1 & 0 & -\frac{2}{45} & \frac{1}{15} & 12 \\
\hline
U: & 0 & 0 & -\frac{14}{9} & -\frac{2}{3} & Z-1.020
\end{array}
$$

Lösung