Klausur: Mathematik am Freitag, den 20. Januar 2006

Jürgen Meisel
FH Ludwigshafen

Zugelassene Hilfsmittel: Mathematische Formelsammlung und nicht progr. Taschenrechner
Bearbeitungszeit: **120 Minuten**

1.) **Integralrechnung**

a) Ermitteln Sie das Marktgleichgewicht zwischen Angebot und Nachfrage:

$$p_A(x) = \frac{1}{8}x^2 + 1 \qquad \text{und} \qquad p_N(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 14{,}5$$

Lösung:

$$\frac{1}{8}x^2 + 1 = -\frac{1}{4}x^2 + 14{,}5$$

$$\xrightarrow{+\frac{1}{4}x^2 - 1} \quad \frac{3}{8}x^2 = 13{,}5 \quad \xrightarrow{\cdot\frac{8}{3}} \quad x^2 = 36 \quad \xrightarrow{\sqrt{\ }} \quad |x| = 6$$

$$p_A(6) = \frac{1}{8} \cdot 36 + 1 = 5{,}5 \quad \Rightarrow \quad M(6 \mid 5{,}5)$$

b) Welchen Wert muss t annehmen, wenn das Marktgleichgewicht bei x = 4 liegen soll und folgende Funktionen vorliegen?

$$p_A(x)_t = \frac{1}{8}x^2 + 2t \qquad \text{und} \qquad p_N(x)_t = -tx^2 + 20t$$

Lösung:

$$\frac{1}{8}x^2 + 2t = -tx^2 + 20t \quad \xrightarrow{x=4 \text{ eingesetzt}} \quad 2 + 2t = -16t + 20t \quad \Rightarrow \quad t = 1$$

c) Ermitteln Sie die **Konsumenten- und Produzentenrente** bei x = 6.

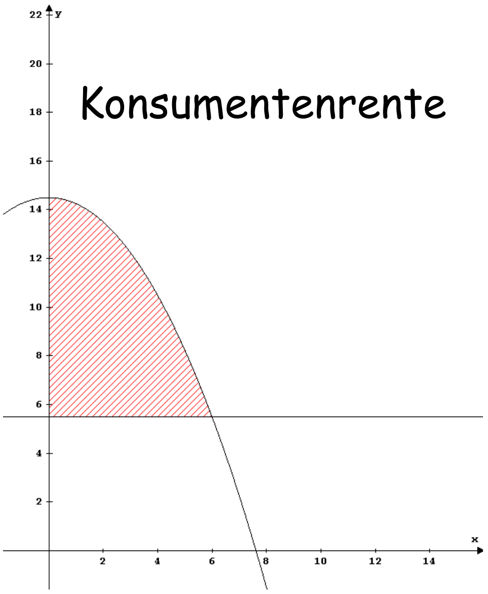
Lösung:

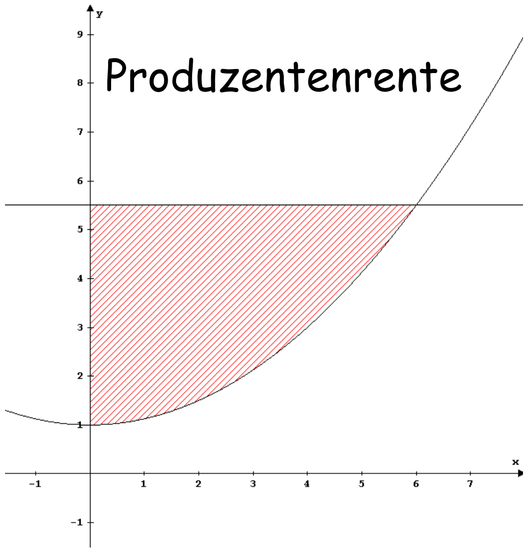
Konsumentenrente:

$$K_R = \int_0^6 \left(-\frac{1}{4}x^2 + 14{,}5\right)dx - 6 \cdot 5{,}5 = \left[-\frac{1}{12}x^3 + 14{,}5x\right]_0^6 - 33 = 36$$

Produzentenrente

$$P_R = 6 \cdot 5{,}5 - \int_0^6 \left(\frac{1}{8}x^2 + 1\right)dx = 33 - \left[\frac{1}{24}x^3 + 1x\right]_0^6 = 18$$





2.) **Ableitungen:**

Bilden Sie die jeweils erste (partielle) Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $$f(x) = \frac{1}{3}x^3(x-1)^2$$

b) $$f(x,y) = y \cdot e^{2x+3} + x^2 y$$

c) $$f(x,y) = a^x \cdot 2y$$

Lösung:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3(x-1)^2$$

$$\xrightarrow{\text{Produkt-/Kettenregel}} \quad f'(x) = x^2(x-1)^2 + \frac{2}{3}x^3(x-1)$$

$$f(x,y) = y \cdot e^{2x+3} + x^2 y$$

$$\xrightarrow{\text{Kettenregel}} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2y \cdot e^{2x+3} + 2xy \quad und \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{2x+3} + x^2$$

$$f(x,y) = a^x \cdot 2y$$

$$\xrightarrow{\text{Produkt-/Kettenregel}} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2y \cdot a^x \cdot \ln(a) \quad und \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2a^x$$

3.) **Determinanten**

Für welche Werte von a ist die Matrix singulär?

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ a & -1 & 3 \\ a & 2 & a \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$A_a \text{ singulär} \quad \Leftrightarrow \quad \det\left(A_a\right) = 0$$

$$\det\left(A_a\right) = -a + 6a + 2a^2 + a^2 - 6 - 2a^2 \overset{!}{=} 0$$

$$a^2 + 5a - 6 = 0 \quad \xrightarrow{\textit{Lösungsformel}} \quad a_1 = 1 \quad \wedge \quad a_2 = -6$$

$$A_a \text{ singulär} \quad \Leftrightarrow \quad \det\left(A_a\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \in \{-6\,;1\}$$

4.) **Kurvendiskussion**

Untersuchen Sie die Funktion f(x) mit der Vorschrift

$$f_t\left(x\right) = \frac{x^2 - tx}{e^x} \qquad mit \quad t > 0$$

nach folgenden Kriterien:

a) Definitionsbereich **und** Nullstellen

Lösung:

$$D = \Re \quad \text{weil gilt: } e^x \neq 0 \quad \forall x \in \Re$$

$$Nullstellen:$$

$$x\left(x - t\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = t$$

b) Beweisen Sie, dass die 1. Ableitung von $f_t\left(x\right)$ folgende Form annehmen kann:

$$f_t{}'\left(x\right) \quad = \quad \frac{2x - t}{e^x} - f_t\left(x\right)$$

Lösung:

$$f_t\,'(x) = \frac{(2x-t)e^x - (x^2-tx)e^x}{e^{2x}}$$

$$= \frac{(2x-t)}{e^x} - \frac{(x^2-tx)}{e^x} = \frac{(2x-t)}{e^x} - f_t(x)$$

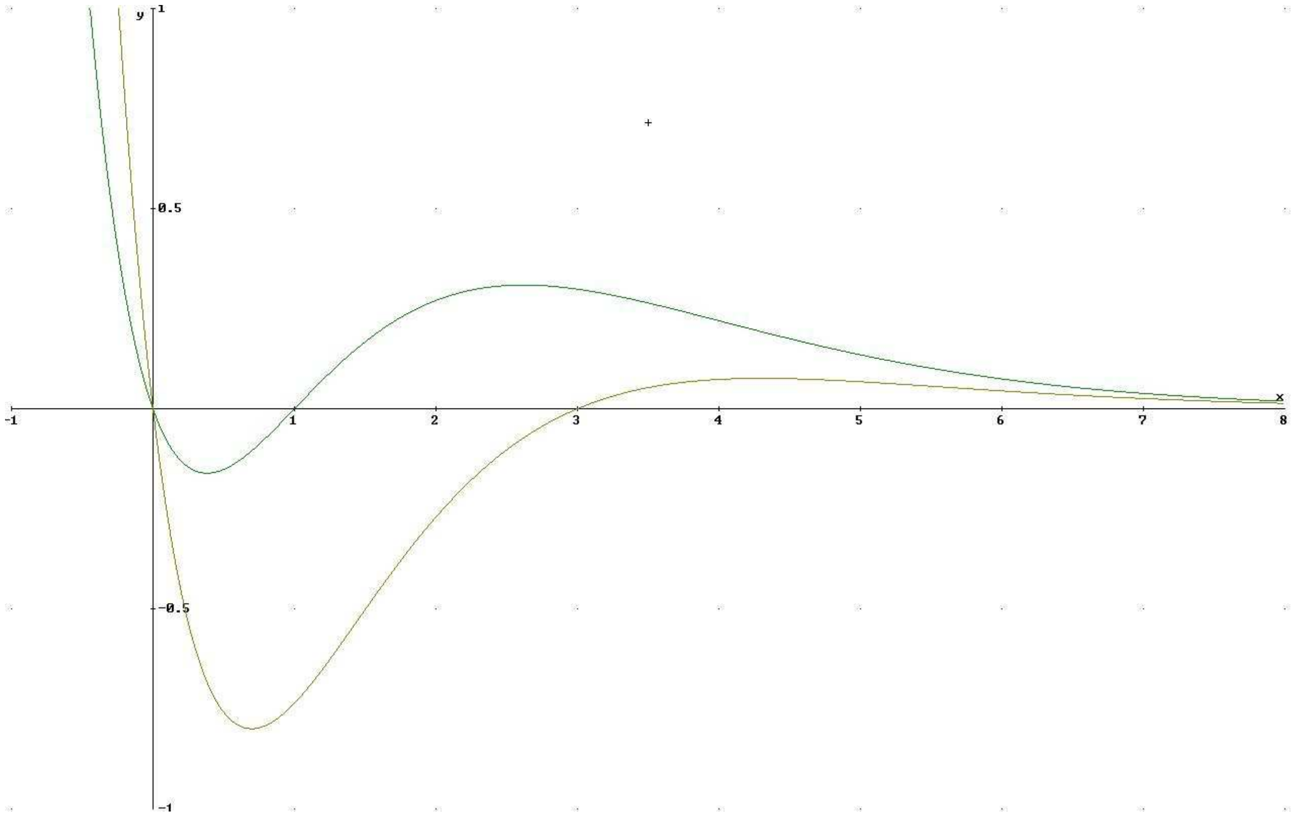
c) Beweisen Sie das Grenzwertverhalten von $f_t(x)$ für $x \to \infty$.

Lösung:

Regel von L'Hospital:

$$\lim_{x\to\infty} f_t(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-tx}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-t}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

d) Für welche beiden Werte von t wurde die Funktion $f_t(x)$ hier abgebildet?



Lösung:

wegen der Nullstellen gilt: $x = t \quad \Rightarrow \quad t_1 = 1 \quad \wedge \quad t_2 = 3$

e) Für welche Werte von t nimmt $f_t(x)$ Nullstellen im Intervall [4; 5] an?

Lösung:

$$\text{wegen der Nullstellen gilt:} \quad x = t$$

$$\Rightarrow \quad t_1 = 4 \quad \wedge \quad t_2 = 5 \quad \Rightarrow \quad t \in [4\,;5]$$

Setzen Sie nun für t = 1 und bearbeiten Sie folgende Fragestellung:

f) Extrema und Wendepunkte von $f_1(x)$

Anmerkung: Für die Wendepunkte genügt die notwendige Bedingung!

Lösung:

Extremwerte:

$$f_1'(x) = \frac{(2x-1)-(x^2-x)}{e^x} = \frac{-x^2+3x-1}{e^x} \overset{!}{=} 0$$

$$\xrightarrow{\cdot e^x} \quad -x^2+3x-1 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2,62 \quad \wedge \quad x_2 = 0,38$$

$$f_1''(x) = \frac{(-2x+3)-(-x^2+3x-1)}{e^x} = \frac{x^2-5x+4}{e^x}$$

$$f_1''(2,62) \approx -2,24 < 0 \quad \Rightarrow \quad Max(2,62 \mid 0,31)$$

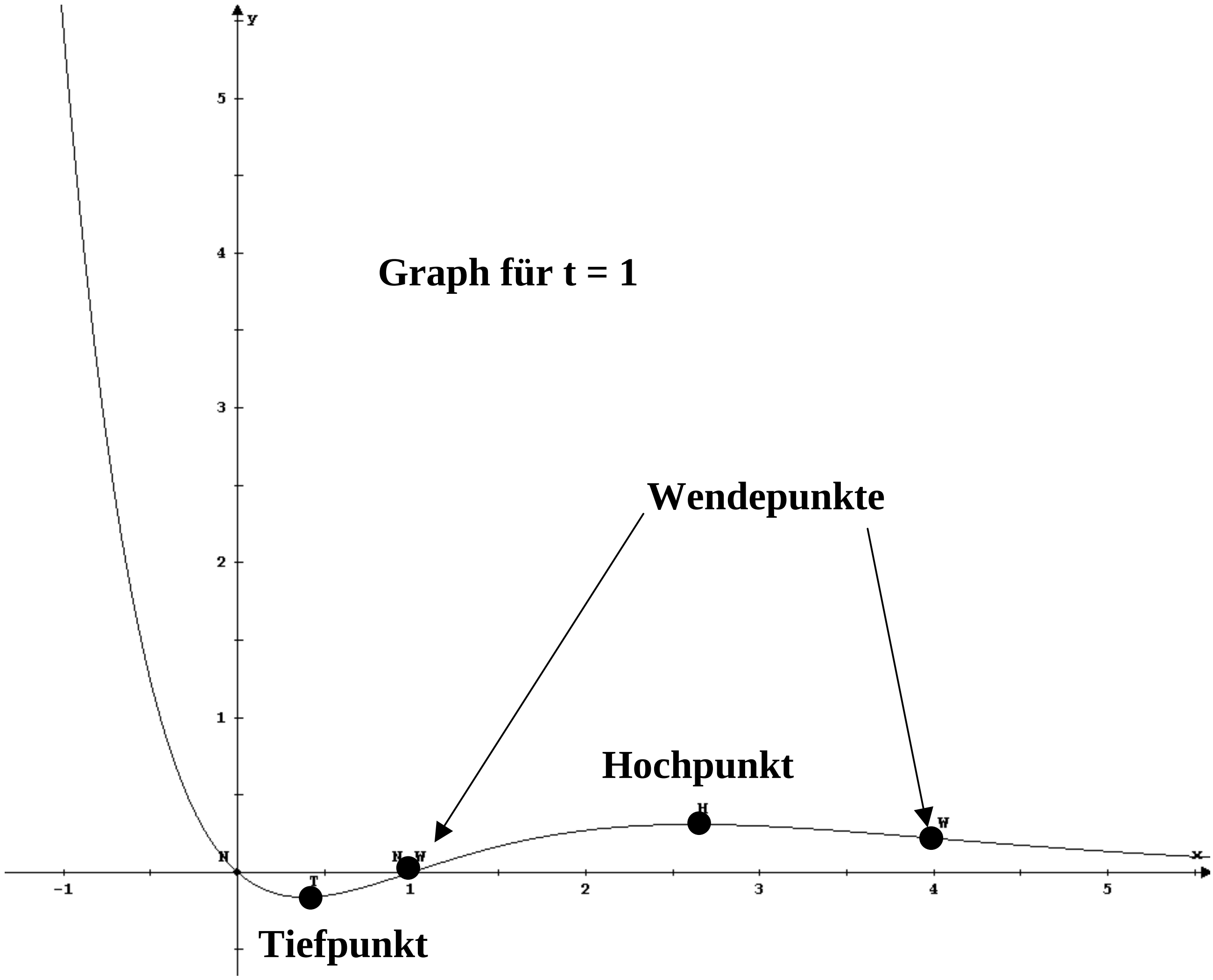
$$f_1''(0,38) \approx 2,24 > 0 \quad \Rightarrow \quad Min(0,38 \mid -0,16)$$

Wendepunkte:

$$f_1''(x) = \frac{x^2-5x+4}{e^x} \overset{!}{=} 0$$

$$\xrightarrow{\cdot e^x} \quad x^2-5x+4 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 \quad \wedge \quad x_2 = 4$$

$$\Rightarrow \quad W_1(1 \mid 0) \quad \wedge \quad W_2(4 \mid 0,22)$$



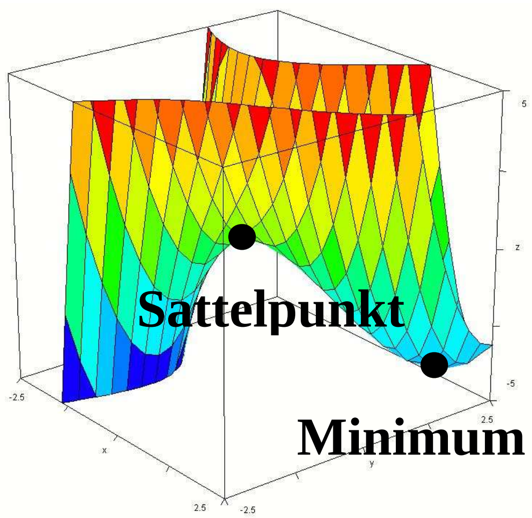
5.) **Optimum ohne und mit Nebenbedingungen**

a) Ermitteln Sie die stationären Stellen der Funktion

$$f(x,y) = x^3 - 6xy + 3y^2$$

und untersuchen Sie diese Stellen auf ihre Extremwerteigenschaft.

Lösung:



$$f(x,y)=x^3-6xy+3y^2$$

$$I.)\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2-6y\overset{!}{=}0 \quad \xrightarrow{II.)\ x=y\ \ in\ I.)} \quad 3x^2-6x\overset{!}{=}0$$

$$II.)\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-6x+6y\overset{!}{=}0 \quad \Rightarrow \quad x=y$$

$$3x^2-6x\overset{!}{=}0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0 \quad \wedge \quad x_2=2 \quad \Rightarrow \quad y_1=0 \quad \wedge \quad y_2=2$$

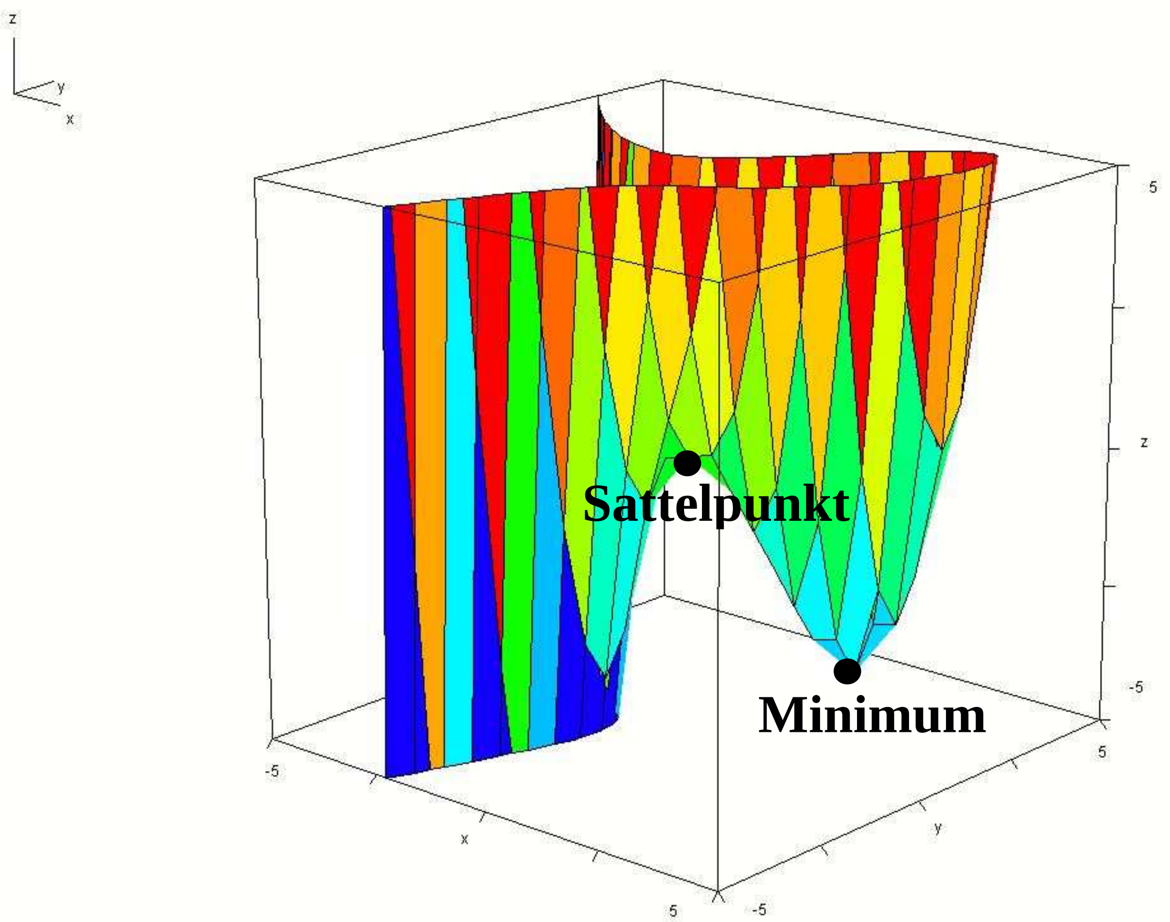
Es resultieren 2 stationäre Stellen: $S_1(0 \mid 0 \mid 0) \quad \wedge \quad S_2(2 \mid 2 \mid -4)$

$Hesse-Matrix:$

$$H(f)=\begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{S_i\ einsetzen}$$

$$H(f(0 \mid 0))=\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(H)<0 \quad \Rightarrow \quad Sattelpunkt$$

$$H(f(2 \mid 2))=\begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(H)>0 \quad \wedge \quad f_{xx}>0 \quad \Rightarrow \quad Min(2 \mid 2 \mid -4)$$



b) Gegeben sei die Produktionsfunktion $q(x,y) = 4x^{0,4}y^{0,6}$

Eine Mengeneinheit von Faktor x kostet 8 €, eine Mengeneinheit von Faktor y kostet 6 €. Das Budget beträgt insgesamt 4.000 €.

Wie viel kann im optimalen Fall produziert werden?

Lösung:

$$L(x,y,\lambda) \quad = \quad 4x^{0,4}y^{0,6} + \lambda(4.000 - 8x - 6y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) \quad = \quad 1,6\frac{y^{0,6}}{x^{0,6}} - 8\lambda \quad \overset{!}{=} \quad 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \quad = \quad 0,2\cdot\frac{y^{0,6}}{x^{0,6}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) \quad = \quad 2,4\frac{x^{0,4}}{y^{0,4}} - 6\lambda \quad \overset{!}{=} \quad 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \quad = \quad 0,4\cdot\frac{x^{0,4}}{y^{0,4}}$$

$$Austauschverhältnis:$$

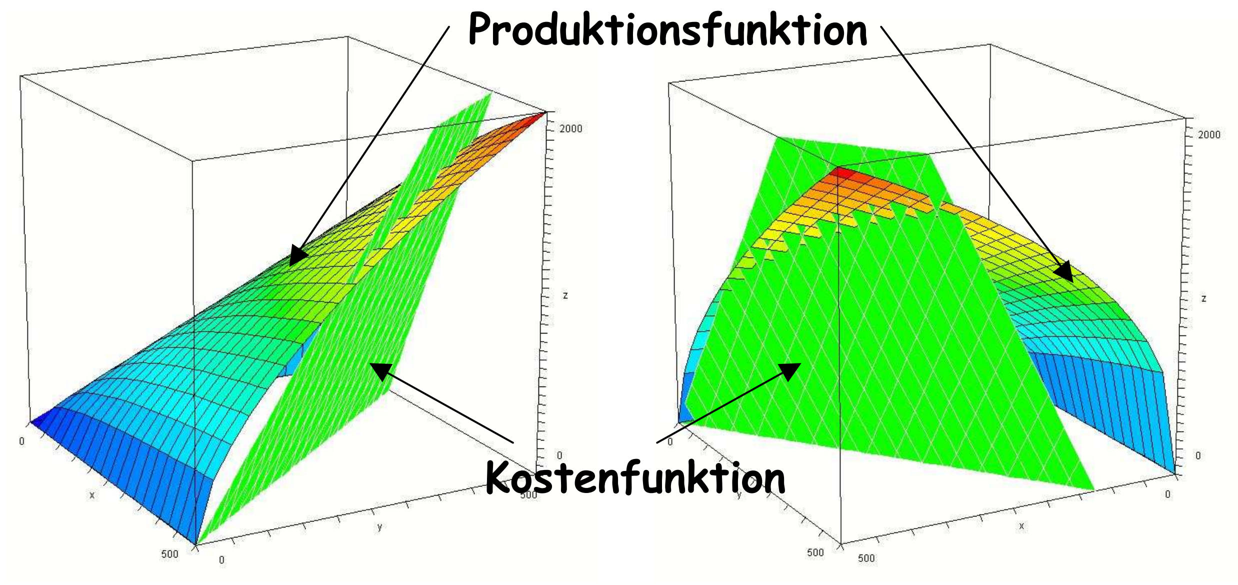
$$0,2\cdot\frac{y^{0,6}}{x^{0,6}} \quad = \quad 0,4\cdot\frac{x^{0,4}}{y^{0,4}} \quad \Rightarrow \quad y \quad = \quad 2x$$

$$eingesetzt\ in\ NB:$$

$$4.000 \quad = \quad 8x + 6y \quad \xrightarrow{y=2x} \quad 4.000 \quad = \quad 8x + 6\cdot 2x$$

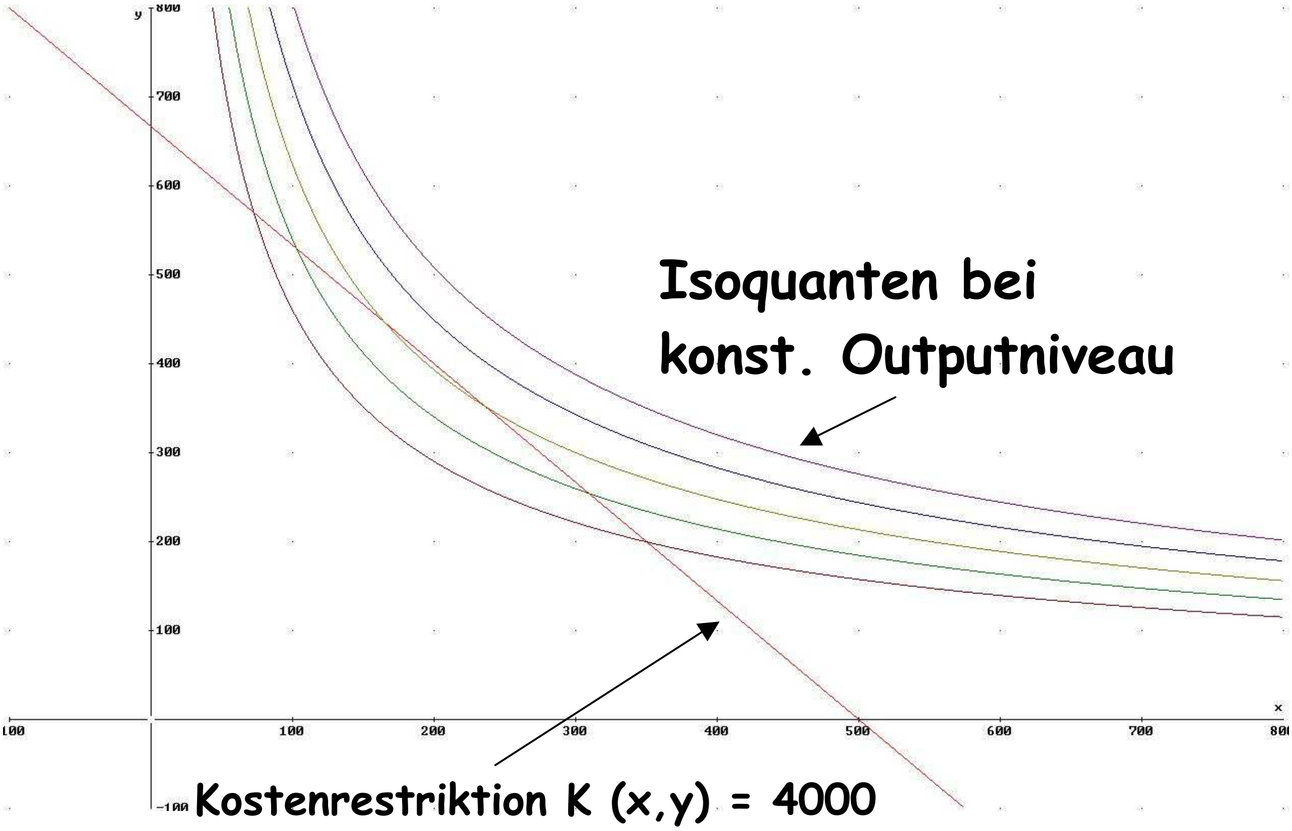
$$\Rightarrow \quad x = 200 \quad \Rightarrow \quad y = 400$$

$$\Rightarrow \quad q(200 \mid 400) = 4\cdot 200^{0,4}\cdot 400^{0,6} = 1.213,18$$

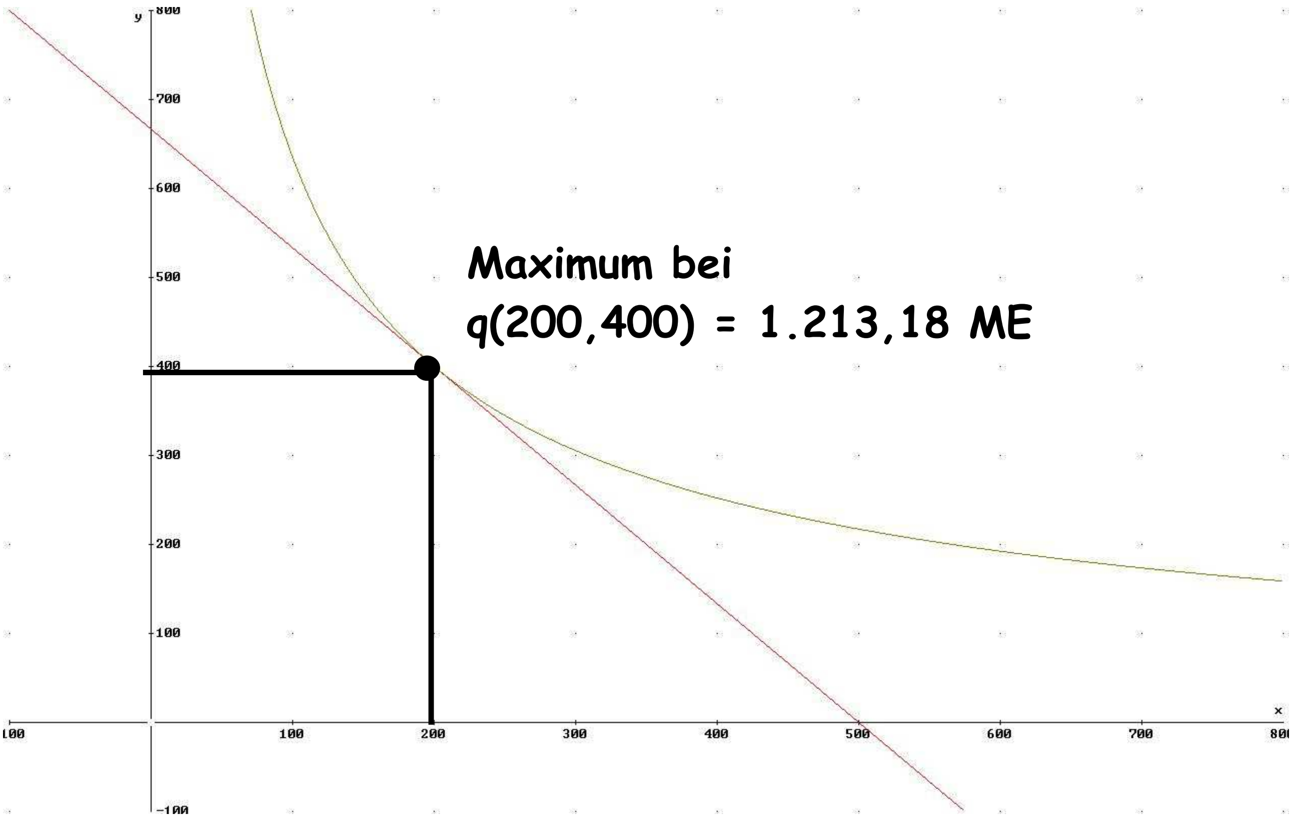


Die grüne Fläche stellt die Kostenrestriktion dar, die andere Flächenfunktion ist die CD-Produktionsfunktion.

Betrachtet man die beiden Funktionen in zweidimensionaler Form, so entstehen die Isoquanten:



Im Tangentenpunkt zwischen Kosten- und Produktionsfunktion liegt dann das Produktionsmaximum unter Berücksichtigung der Kostenrestriktion:



6.) **Ökonomische Anwendungen zu Matrizen**

Gegeben seien die Matrizen $M_{RZ} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ und $M_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Wie viele Rohstoffe werden für je eine Mengeneinheit der Endprodukte benötigt?

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 20 & 23 \\ 7 & 16 & 17 \\ 14 & 32 & 34 \end{pmatrix}$$

b) Wie viele Rohstoffe müssen für einen Auftrag von 20 E_1, 40 E_2 und 30 E_3 im Lager vorrätig sein?

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 9 & 20 & 23 \\ 7 & 16 & 17 \\ 14 & 32 & 34 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.670 \\ 1.290 \\ 2.580 \end{pmatrix}$$

c) Nun hat man einen Lagerbestand an Rohstoffen von R_1 = 825, R_2 = 623 und R_3 = 1.246.

(i) Wie viele Endprodukte E_1 , E_2 und E_3 können hiermit hergestellt werden, wenn das Lager danach komplett leer sein sollte und E_3 als freie Variable gewählt wird.
(=> allgemeine Lösung in Abhängigkeit von E_3!)

(ii) Geben Sie nun eine bestimmte Lösung mit E_3 = 25 an?

Lösung:

$$L_{\text{allgemein}} = \left\{ x_3 \in \Re \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 185 - 7x_3 \\ -42 + 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$L_{\text{bestimmt}} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 25 \end{pmatrix} \right\}$$

Lösungsweg:

Schrittweise Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
9\,x_1 + 20\,x_2 + 23\,x_3 &= 825 \quad (1)\\
7\,x_1 + 16\,x_2 + 17\,x_3 &= 623 \quad (2)\\
14\,x_1 + 32\,x_2 + 34\,x_3 &= 1246 \quad (3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1 + 20/9\,x_2 + 23/9\,x_3 &= 275/3 \quad (1)\\
7\,x_1 + 16\,x_2 + 17\,x_3 &= 623 \quad (2)\\
14\,x_1 + 32\,x_2 + 34\,x_3 &= 1246 \quad (3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1 + 20/9\,x_2 + 23/9\,x_3 &= 275/3 \quad (1)\\
4/9\,x_2 - 8/9\,x_3 &= -56/3 \quad (2)\\
14\,x_1 + 32\,x_2 + 34\,x_3 &= 1246 \quad (3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1 + 20/9\,x_2 + 23/9\,x_3 &= 275/3 \quad (1)\\
4/9\,x_2 - 8/9\,x_3 &= -56/3 \quad (2)\\
8/9\,x_2 - 16/9\,x_3 &= -112/3 \quad (3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1 \qquad + 7\,x_3 &= 185 \quad (1)\\
x_2 - 2\,x_3 &= -42 \quad (2)\\
8/9\,x_2 - 16/9\,x_3 &= -112/3 \quad (3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1 \qquad + 7\,x_3 &= 185 \quad (1)\\
x_2 - 2\,x_3 &= -42 \quad (2)\\
0 &= 0 \quad (3)
\end{aligned}$$

Unendlich viele Lösungen: 1 Parameter wählbar

$x_1 = 185 \quad - 7\,x_3$

$x_2 = -42 \quad + 2\,x_3$

x_3 beliebig wählbar

7.) **Berechnen mathematischer Ausdrücke**

Bestimmen Sie die Lösung folgender Gleichungen und Ausdrücke:

a) $$\sum_{i=1}^{200}(4i)$$

Lösung:

$$\sum_{i=1}^{200}(4i) = 4\cdot\sum_{i=1}^{200} i = 4\cdot\frac{200\cdot 201}{2} = 80.400$$

---

b) $$\sum_{i=3}^{52}(i-2) \quad + \quad \sum_{i=1}^{50} i$$

Lösung:

$$\sum_{i=3}^{52}(i-2)+\sum_{i=1}^{50} i \overset{Indexverschiebung}{=} \sum_{i=1}^{50} i+\sum_{i=1}^{50} i = 2\cdot\sum_{i=1}^{50} i = 2\cdot\frac{50\cdot 51}{2} = 2.550$$

---

c) $$\frac{\sum_{i=3}^{5} 2^i}{\binom{4}{2}}$$ ***Lösung:*** $$\frac{\sum_{i=3}^{5} 2^i}{\binom{4}{2}} = \frac{2^3+2^4+2^5}{6} = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}$$

---

d) $$\binom{300}{298} + \binom{100}{99}$$

Lösung: $$\binom{300}{298} + \binom{100}{99} = \frac{300\cdot 299}{1\cdot 2} + 100 = 44.950$$

---

e) $$Det\begin{pmatrix} 2 & n \\ -n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n+1 \\ n \end{pmatrix} = 6$$

Lösung:

$$Det\begin{pmatrix} 2 & n \\ -n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n+1 \\ n \end{pmatrix} = 6 \Rightarrow (2+n^2)\cdot(n+1) = 6$$

$$\Rightarrow \quad n^3+n^2+2n-4=0 \qquad \Rightarrow \quad n=1 \text{ als einzige Lösung}$$

---

f) $$2x^4-8x^2-2 = 2x^2+70$$

Lösung:

$$2x^4-8x^2-2 = 2x^2+70 \quad\Rightarrow\quad 2x^4-10x^2-72 = 0$$

$$\xrightarrow{Substitution:\, x^2=u} 2u^2-10u-72 = 0$$

$$\xrightarrow{Lösung\ \ für\ u} u_1=-4 \quad\wedge\quad u_2=9$$

$$\xrightarrow{\text{Resubstitution: } x^2=u} u_1: keine\ Lösung \quad u_2: \quad x_1=3 \quad\wedge\quad x_2=-3$$

8.) **Newton-Iteration**

Bestimmen Sie die Wurzel aus 5 mittels der Newton-Iteration auf drei Stellen genau.

Lösung:

$$f(x) = x^2 - 5 \quad und \quad f'(x) = 2x$$

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	2	-1	4	2.25
1	2.25	0.0625	4.5	2.2361
2	2.2361111	0.000192901	4.472222	2.236067
3	2.236067	1.860473552	4.472135	2.236067

9.) **Investitionsrechnung**

Die haben zwei Projekte zur Auswahl und sollen eine Investitionsentscheidung treffen.

Beide Projekte verursachen eine Anfangsausgabe von je 8.000,00 €.

Die Rückflüsse für Projekt I in den folgenden vier Jahren würden bei 2.000 € (Jahr 1), 3.000 € (Jahr 2), 3.000 € (Jahr 3) und 2.000 € (Jahr 4) liegen.

Projekt II würde in den ersten beiden Jahren keine Rückflüsse erbringen, aber mit 5.000 € (Jahr 3) und 6.000 € (Jahr 4) absolut gesehen einen vermeintlich höheren Ertrag liefern.

a) Beurteilen Sie die Situation auf Basis eines Kalkulationszinssatzes von 6 % mit Hilfe der Kapitalwertmethode und treffen Sie eine Investitionsentscheidung.

Lösung:

Projekt I:

$$C_0 = -8.000 + \frac{2.000}{1,06} + \frac{3.000}{1,06^2} + \frac{3.000}{1,06^3} + \frac{2.000}{1,06^4} = 659,83$$

Projekt II:

$$C_0 = -8.000 + \frac{0}{1,06} + \frac{0}{1,06^2} + \frac{5.000}{1,06^3} + \frac{6.000}{1,06^4} = 950,66$$

Da das Projekt II den höheren Kapitalwert besitzt, sollte man sich für dieses entscheiden.

b) Wie hoch wäre der interne Zinsfuß/-satz für Projekt I?

(Anmerkung: eine Näherung per Newton-Iteration genügt!)

Lösung:

Projekt I:

$$C_0(q) = -8.000 + \frac{2.000}{q} + \frac{3.000}{q^2} + \frac{3.000}{q^3} + \frac{2.000}{q^4} \overset{!}{=} 0$$

$$-8q^4 + 2q^3 + 3q^2 + 3q + 2 \overset{!}{=} 0 \xrightarrow{\text{Lösung per Newton-Iteration}}$$

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f\,'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f\,'(x_n)$
0	1.1	-0.1208	-25.732	1.095305
1	1.0953	-0.0010650	-25.279	1.095263

Der interne Zinsfuß liegt bei etwa p_{intern} = 9,53 [%]