Klausur: Mathematik
am Freitag, den 30. Juni 2006

Jürgen Meisel
FH Ludwigshafen

Zugelassene Hilfsmittel: Mathematische Formelsammlung und nicht progr. Taschenrechner
Bearbeitungszeit: **120 Minuten**

1.) Integralrechnung

a) Ermitteln Sie das Marktgleichgewicht zwischen Angebot und Nachfrage:

$$p_A(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4 \qquad \text{und} \qquad p_N(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 19\frac{5}{8}$$

Lösung:

$$\frac{1}{2}x^2 + 4 = -\frac{1}{8}x^2 + 19\frac{5}{8}$$

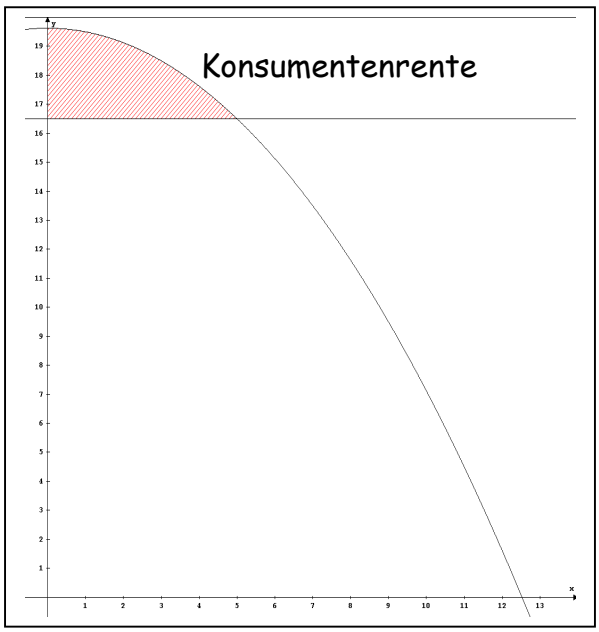
$$\xrightarrow{+\frac{1}{8}x^2 - 4} \frac{5}{8}x^2 = 15\frac{5}{8} \xrightarrow{\cdot\frac{8}{5}} x^2 = 25 \xrightarrow{\sqrt{\ }} |x| = 5$$

$$p_A(5) = \frac{1}{2}\cdot 25 + 4 = 16{,}5 \quad \Rightarrow \quad M(5 \mid 16{,}5)$$

b) Ermitteln Sie die **Konsumentenrente** bei x = 5.

Lösung:

$$p_N(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 19\frac{5}{8}$$



Konsumentenrente:

$$K_R = \int_0^5 \left(-\frac{1}{8}x^2 + 19\frac{5}{8}\right)dx - 5\cdot 16{,}5$$

$$K_R = \left[-\frac{1}{24}x^3 + 19\frac{5}{8}x\right]_0^5 - 82{,}5$$

$$K_R = 10{,}416 = \frac{125}{12}$$

2.) **Ableitungen:**

Bilden Sie die jeweils erste (partielle) Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 4x^3 - x^2 + 1$

b) $f(x) = x^2 \cdot e^{4x}$

c) $f(x,y) = x^3 + xy + y^3$

Lösung:

$$f(x) = 4x^3 - x^2 + 1$$

$$\xrightarrow{\text{Potenzregel}} f'(x) = 12x^2 - 2x$$

$$f(x) = x^2 \cdot e^{4x}$$

$$\xrightarrow{\text{Produkt-/Kettenregel}} f'(x) = 2x \cdot e^{4x} + 4x^2 \cdot e^{4x} = 2x \cdot e^{4x}(1+2x)$$

$$f(x,y) = x^3 + xy + y^3$$

$$\xrightarrow{\text{Potenzregel}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + y \quad und \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 3y^2$$

3.) **Determinanten**

Für welche Werte von a ist die Matrix singulär?

$$A_a = \begin{pmatrix} 2a^2 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$A_a \text{ singulär} \quad \Leftrightarrow \quad \det(A_a) = 0$$

$$\det(A_a) = 2a^2 - 18 \overset{!}{=} 0$$

$$a^2 = 9 \quad \xrightarrow{\sqrt{\ }} \quad a_1 = 3 \quad \wedge \quad a_2 = -3$$

$$A_a \text{ singulär} \quad \Leftrightarrow \quad \det(A_a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \in \{-3\,;3\}$$

4.) **Kurvendiskussion**

Untersuchen Sie die Funktion f(x) mit der Vorschrift

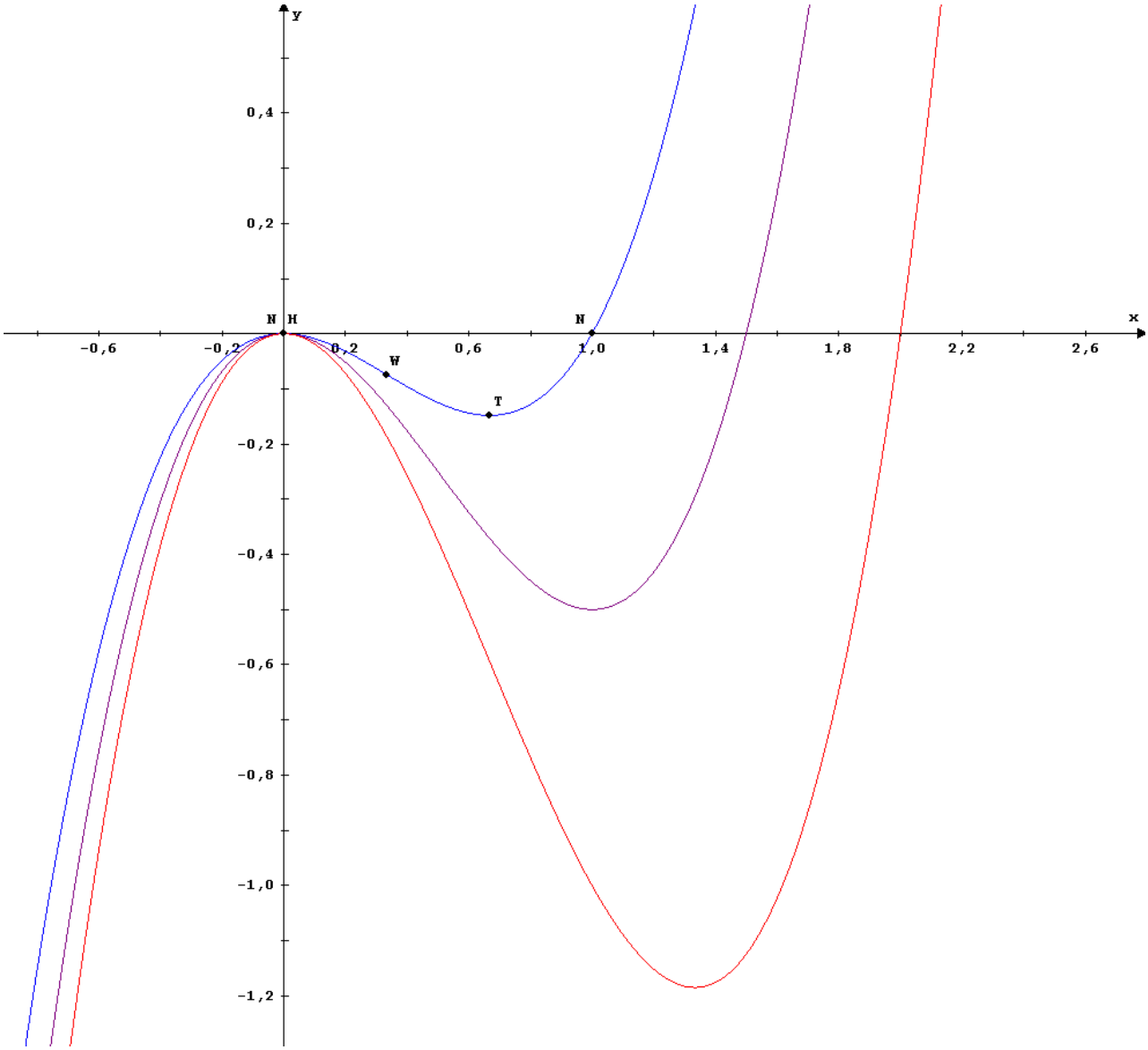
$$f_k(x) \quad = \quad x^3 - kx^2 \quad mit \quad k > 0$$

nach folgenden Kriterien:

a) Schnittstellen mit den Achsen b) Extrema

c) Ortskurve der Minima d) Wendepunkte

<u>Lösung:</u>



Graph der Funktion für die Parameterwerte k = {1 ; 1,5 ; 2}

Nullstellen:

$$x^2(x-k)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0 \ (doppelt) \quad \wedge \quad x_2=k$$

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$f_k(0) \quad = \quad 0 \quad \Rightarrow \quad S_y(0 \mid 0)$$

Extremwerte:

$$f_k'(x) \quad = \quad 3x^2-2kx \quad \overset{!}{=} \quad 0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0 \quad \wedge \quad x_2=\frac{2}{3}k$$

$$f_k''(x) \quad = \quad 6x-2k$$

$$f_k''(0) \quad = \quad -2k<0 \quad \Rightarrow \quad Max_1(0 \mid 0)$$

$$f_k''\left(\frac{2}{3}k\right) \quad = \quad 2k>0 \quad \Rightarrow \quad Min_1\left(\frac{2}{3}k \,\middle|\, -\frac{4}{27}k^3\right)$$

Ortskurve der Minima:

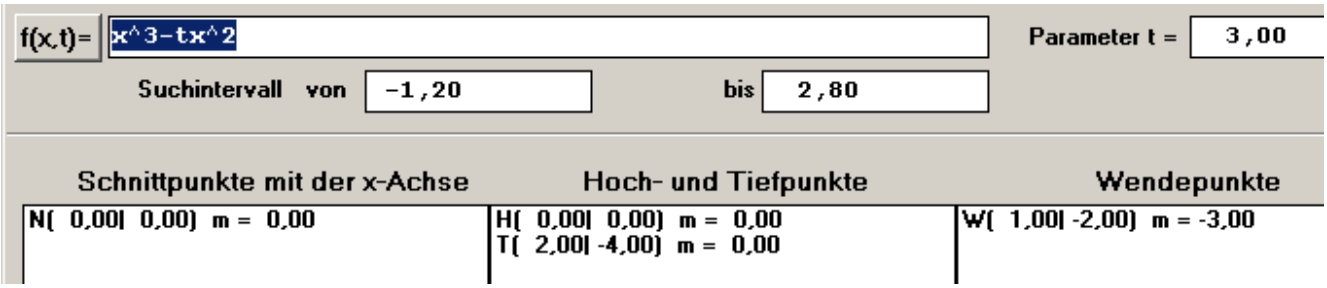
$$x=\frac{2}{3}k \quad \Rightarrow \quad k=\frac{3}{2}x \quad \xrightarrow{\text{einsetzen in } y=-\frac{4}{27}k^3} \quad y=-\frac{4}{27}\cdot\left(\frac{3}{2}x\right)^3=-\frac{1}{2}x^3$$

Wendepunkt:

$$f_k''(x) \quad = \quad 6x-2k \quad \overset{!}{=} \quad 0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{3}k$$

$$f_k'''(0) \quad = \quad 6 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W\left(\frac{1}{3}k \,\middle|\, -\frac{2}{27}k^3\right)$$

Beispielwerte für den Parameter k = 3:



5.) **Optimum ohne Nebenbedingungen**

a) Auf einer gegebenen landwirtschaftlichen Fläche sind x Mengeneinheiten eines Mineraldüngers und y Mengeneinheiten eines Kunstdüngers zur Erreichung eines Produktionszieles $f(x,y)$ einzusetzen.

Die Produktionsfunktion lautet:

$$f(x,y) \quad = \quad 240+4x+10y-x^2+3xy-\frac{5}{2}y^2 .$$

Bei welcher Düngereinsatzkombination ergibt sich ein Produktionsmaximum?

<u>Lösung:</u>

$$f(x,y) \quad = \quad 240+4x+10y-x^2+3xy-\frac{5}{2}y^2$$

$$I.) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4-2x+3y\overset{!}{=}0 \quad \Rightarrow \quad x=2+\frac{3}{2}y$$

$$II.) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=10+3x-5y\overset{!}{=}0$$

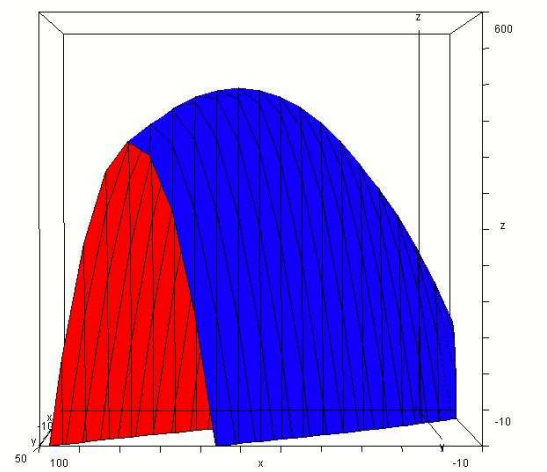
$$\xrightarrow{I.)\ x=2+\frac{3}{2}y\ \ in\ II.)} \quad 10+3\left(2+\frac{3}{2}y\right)-5y\overset{!}{=}0 \quad \Rightarrow \quad y=32 \quad \Rightarrow \quad x=50$$

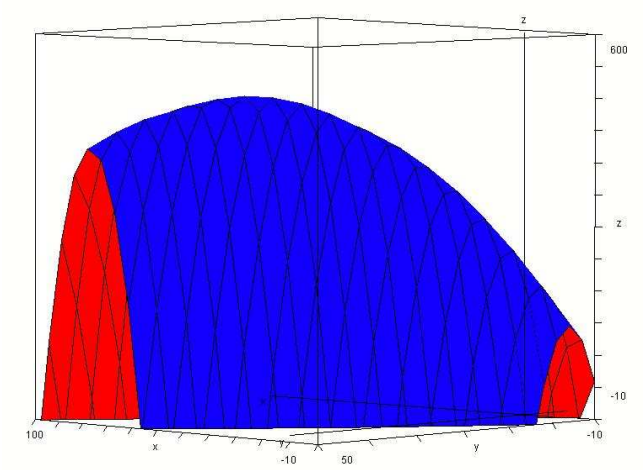
Es resultiert eine stationäre Stelle: $S(50 \mid 32 \mid 500)$

$Hesse-Matrix$:

$$H\left(f(50 \mid 32)\right)=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad negativ\ definit$$

$$\Rightarrow \quad \det(H)=1>0 \quad \wedge \quad f_{xx}=-2<0 \quad \Rightarrow \quad Max(50 \mid 32 \mid 500)$$





b) Ermitteln Sie die Extremwerte der folgenden Funktion:

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + y^2 - 12$$

Lösung:

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + y^2 - 12$$

$$I.)\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^2 - 2x \overset{!}{=} 0 \xrightarrow{x(x-2)=0} x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = 2$$

$$II.)\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

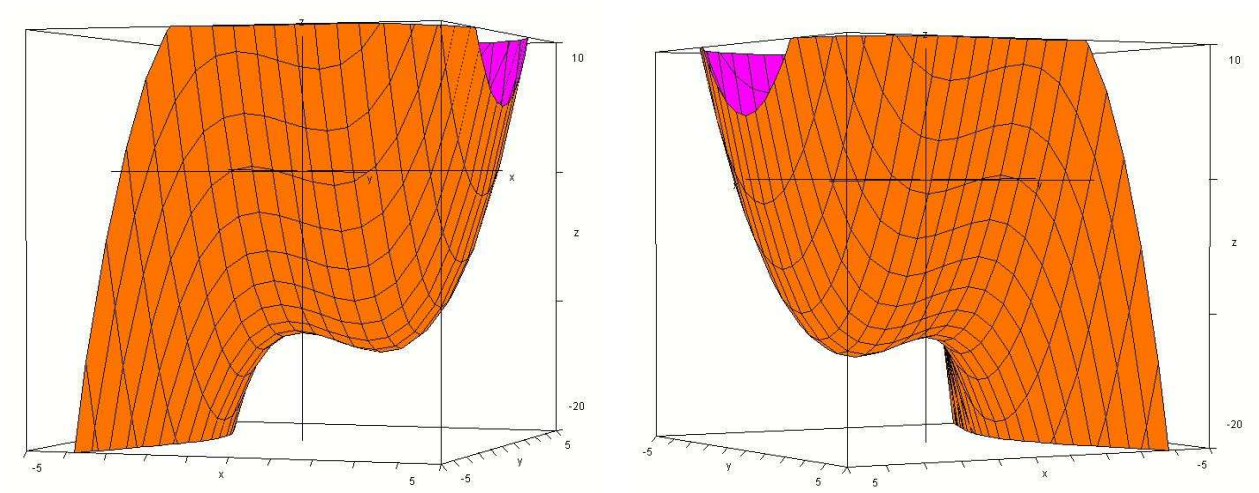
Es resultieren 2 stationäre Stellen: $S_1(0 \mid 0 \mid -12) \quad \wedge \quad S_2\left(2 \,\middle|\, 0 \,\middle|\, -13\frac{1}{3}\right)$

$Hesse - Matrix$:

$$H(f) = \begin{pmatrix} 2x-2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_i\ einsetzen}$$

$$H(f(0 \mid 0)) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(H) < 0 \quad \Rightarrow \quad Sattelpunkt$$

$$H(f(2 \mid 0)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(H) > 0 \quad \wedge \quad f_{xx} > 0 \quad \Rightarrow \quad Min\left(2 \,\middle|\, 0 \,\middle|\, -13\frac{1}{3}\right)$$



6.) **Vollständiges Differential und Optimum mit Nebenbedingungen**

Gesucht ist das Haushaltsoptimum, wenn folgende Daten vorliegen:

Nutzenfunktion: $u(x,y) = x \cdot y$

Güterpreise: p_1 = 4 Geldeinheiten p_2 = 16 Geldeinheiten

Konsumbudget: 640 Geldeinheiten

a) Bilden Sie das totale Differential $d\,u$ der Nutzenfunktion, wenn sich der Nutzen von P_1 (x/y) = (4/6) auf von P_2 (x/y) = (3/8) ändert.

Lösung:

$$u(x,y) = x \cdot y$$

$$d\,u = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \cdot dy$$

$$d\,u = y \cdot (3-4) + x \cdot (8-6) = 6 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 = 2$$

b) Wie groß ist die tatsächliche Veränderung $\Delta\,u$?

Lösung:

$$\Delta\,u = u(3,8) - u(4,6)$$

$$\Delta\,u = 3 \cdot 8 - 4 \cdot 6 = 0$$

c) Ermitteln Sie eine analytische Lösung des Optimierungsproblems mittels Lagrangeansatz.

d) Wie hoch ist der Nutzen im Optimum?

Lösung:

$$L(x,y,\lambda) \quad = \quad x\cdot y+\lambda(640-4x-16y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) \quad = \quad y-4\lambda \quad \overset{!}{=} \quad 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \quad = \quad \frac{1}{4}y$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) \quad = \quad x-16\lambda \quad \overset{!}{=} \quad 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \quad = \quad \frac{1}{16}x$$

Austauschverhältnis:

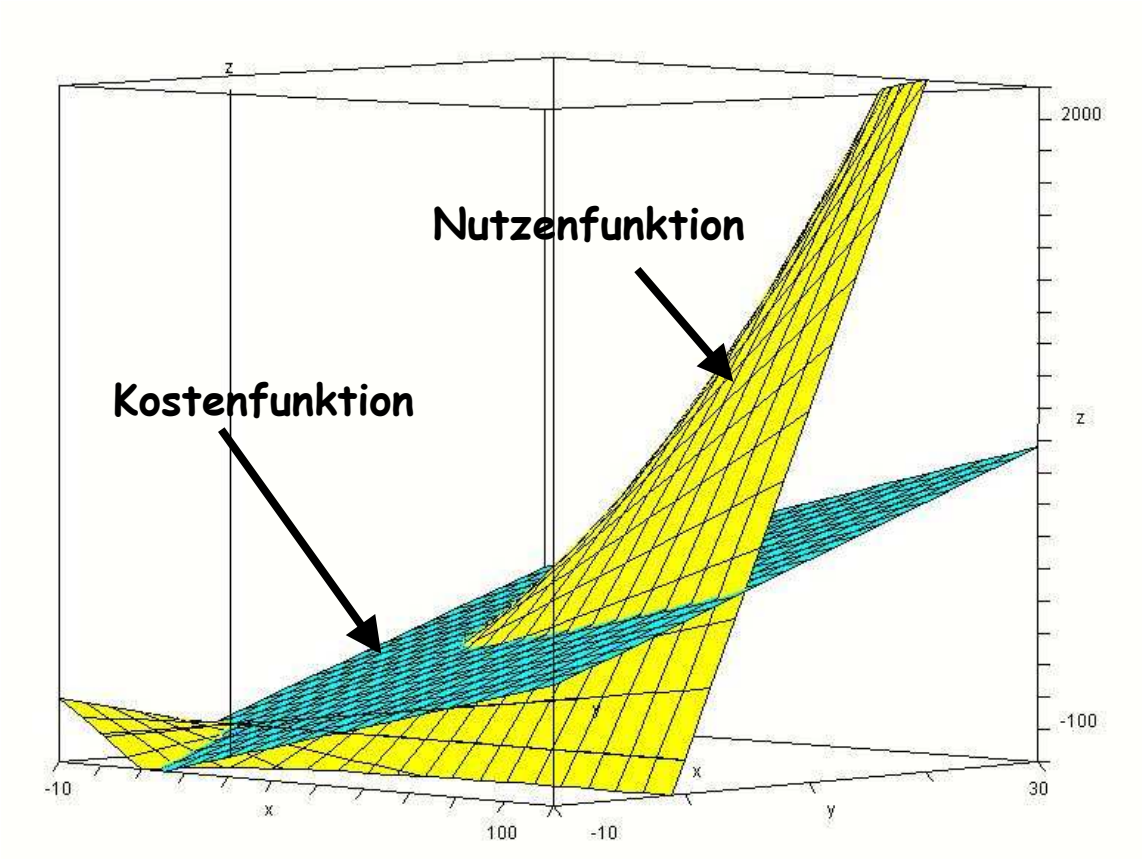
$$\frac{1}{4}y \quad = \quad \frac{1}{16}x \quad \Rightarrow \quad y \quad = \quad \frac{1}{4}x$$

eingesetzt in NB:

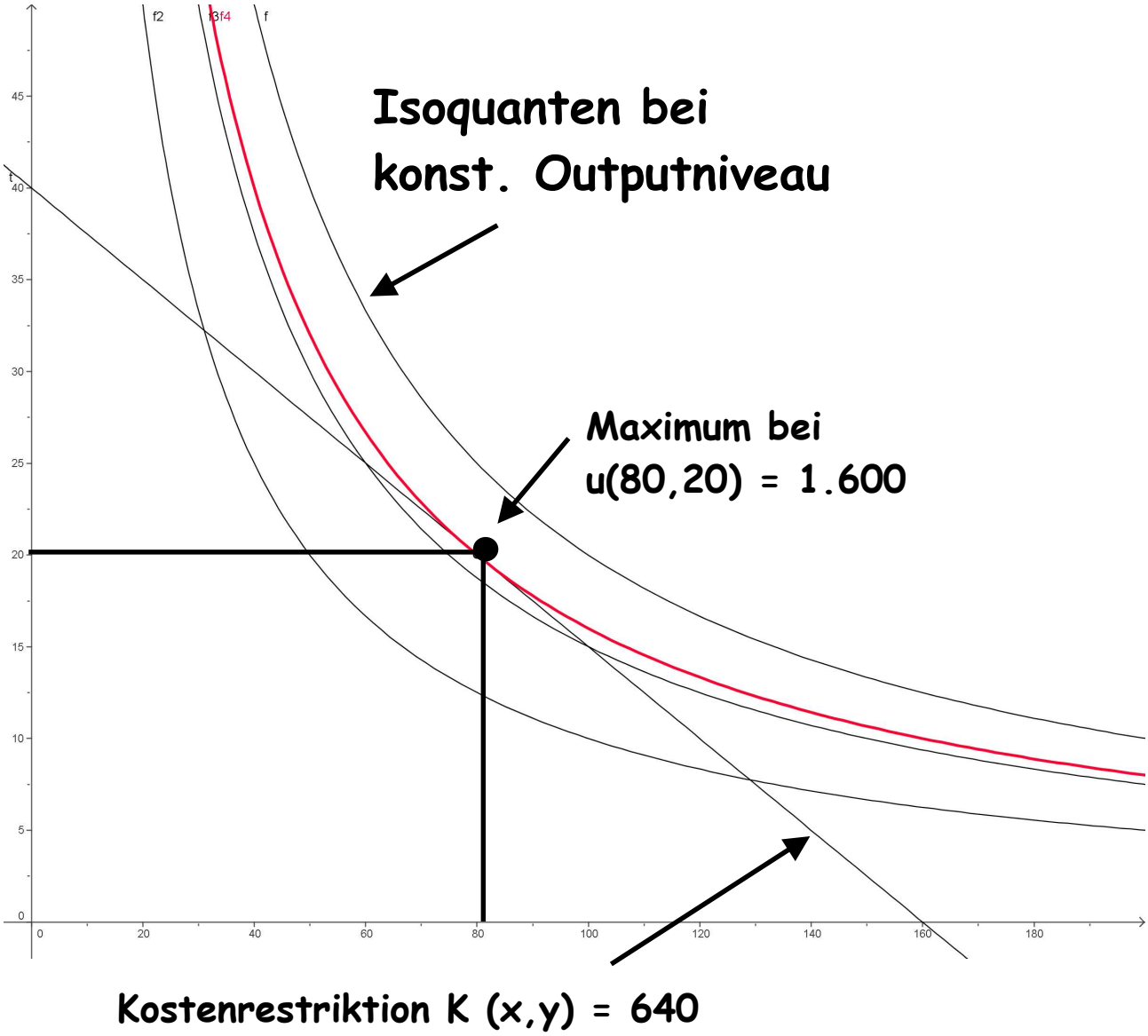
$$640 \quad = \quad 4x+16y \quad \xrightarrow{y=\frac{1}{4}x} \quad 640 \quad = \quad 4x+16\cdot\frac{1}{4}x$$

$$\Rightarrow \quad x \quad = \quad 80 \quad \Rightarrow \quad y \quad = \quad 20$$

$$\Rightarrow \quad u(80 \mid 20) \quad = \quad 80\cdot 20 \quad = \quad 1.600$$



Darstellung der Lösung mit Hilfe der Isoquanten:



7.) **Ökonomische Anwendungen zu Matrizen**

Gegeben sind folgende Matrizen einer Produktionsserie:

$$M_{RZ} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad M_{ZE} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Matrix M_{RE}.

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 17 \\ 24 & 21 \\ 34 & 29 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten einen Auftrag an Endprodukten von e = (20 , 10)

b) Wie viele Rohstoffe benötigen wir zur Erfüllung des Auftrages?

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 28 & 17 \\ 24 & 21 \\ 34 & 29 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 730 \\ 690 \\ 970 \end{pmatrix}$$

Wir haben einen Rohstoffvorrat von (90 , 70 , 100)

c) Wie viele Zwischenprodukte können wir herstellen, wenn danach das Lager vollkommen leer ist?

Lösung:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 90 \\ 3 & 2 & 70 \\ 4 & 3 & 100 \end{array}\right) \xrightarrow[III.)-4\cdot I.)]{II.)-3\cdot I.)}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 90 \\ 0 & -10 & -200 \\ 0 & -13 & -260 \end{array}\right) \Rightarrow \quad y = 20 \quad \Rightarrow \quad x = 10$$

8.) **Berechnen mathematischer Ausdrücke**

Gegeben sind folgende Matrizen:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ -2 & 1 & t\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}1 & 4 & -1\\ t & 2 & 1\end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 4\end{pmatrix}$$

Berechnen Sie nun folgende Ausdrücke:

a) A + 2 C b) $(3D * A)^T$ c) D^{-1}

Lösung:

$$a)\quad A+2C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ -2 & 1 & t\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1 & 4 & -1\\ t & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 10 & 2\\ 2t-2 & 5 & t+2\end{pmatrix}$$

$$b)\quad (3D\cdot A)^T:\quad 3\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ -2 & 1 & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 15 & 24+3t\\ -27 & 6 & 12t-12\end{pmatrix}\xrightarrow{T}\begin{pmatrix}0 & -27\\ 15 & 6\\ 24+3t & 12t-12\end{pmatrix}$$

$$c)\quad D^{-1}=\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}4 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Lösung zu folgenden Aufgaben:

d) $\binom{4}{2}$ e) $\sum_{i=1}^{4}\binom{6}{i}$ f) $(y+4)^5$ g) $x^4+x^2-8 \;=\; -6$

Lösung:

$$d)\quad \binom{4}{2}=\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6 \qquad e)\quad \sum_{i=1}^{4}\binom{6}{i}=\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}=6+15+20+15=56$$

$$f)\quad (y+4)^5=\binom{5}{0}y^0\cdot 4^5+\binom{5}{1}y^1\cdot 4^4+\binom{5}{2}y^2\cdot 4^3+\binom{5}{3}y^3\cdot 4^2+\binom{5}{4}y^4\cdot 4^1+\binom{5}{5}y^5\cdot 4^0$$

$$(y+4)^5=1.024+1.280y+640y^2+160y^3+20y^4+y^5$$

$$g)\quad x^4+x^2-8 \;=\; -6 \xrightarrow{+6} x^4+x^2-2 \;=\; 0 \xrightarrow{u:=x^2} u^2+u-2 \;=\; 0$$

$$\Rightarrow\quad u_1=1 \;\wedge\; u_2=-2$$

$$\xrightarrow{\text{Resub.}} x^2 \;=\; 1 \;\Rightarrow\; x_1=1 \;\wedge\; x_2=-1$$

$$\xrightarrow{\text{Resub.}} x^2 \;=\; -2 \;\Rightarrow\; \textit{keine Lösung}$$

OPTION OPTION OPTION

Wählen Sie aus sua eiS nelhäW Wählen Sie aus sua eiS nelhäW

Entweder Aufgabe 9 <u>oder</u> Aufgabe 10

9.) **Investitionsrechnung**

Die haben zwei Projekte zur Auswahl und sollen eine Investitionsentscheidung treffen.

Beide Projekte verursachen eine Anfangsausgabe von je 10.000,00 €. Die Rückflüsse für Projekt I in den folgenden vier Jahren würden bei 3.000 € (Jahr 1), 4.000 € (Jahr 2), 4.000 € (Jahr 3) und 2.000 € (Jahr 4) liegen.

Projekt II würde in den ersten beiden Jahren keine Rückflüsse erbringen, aber mit 7.000 € (Jahr 3) und 6.700 € (Jahr 4) absolut gesehen einen vermeintlich höheren Ertrag liefern.

a) Beurteilen Sie die Situation auf Basis eines Kalkulationszinssatzes von 5 % mit Hilfe der Kapitalwertmethode und treffen Sie eine Investitionsentscheidung.

<u>Lösung:</u>

Projekt I:

$$C_0 = -10.000 + \frac{3.000}{1,05} + \frac{4.000}{1,05^2} + \frac{4.000}{1,05^3} + \frac{2.000}{1,05^4} = 1.586,01$$

Projekt II:

$$C_0 = -10.000 + \frac{0}{1,05} + \frac{0}{1,05^2} + \frac{7.000}{1,05^3} + \frac{6.700}{1,05^4} = 1.558,97$$

Da das Projekt I den höheren Kapitalwert besitzt, sollte man sich für dieses entscheiden.

b) Wie hoch wäre der interne Zinsfuß/-satz für Projekt I?

(Anmerkung: eine Näherung per Newton-Iteration genügt!)

Lösung:

Projekt I:

$$C_0(q) = -10.000 + \frac{3.000}{q} + \frac{4.000}{q^2} + \frac{4.000}{q^3} + \frac{2.000}{q^4} \overset{!}{=} 0$$

$$-10q^4 + 3q^3 + 4q^2 + 4q + 2 \overset{!}{=} 0 \xrightarrow{\text{Lösung per Newton-Iteration}}$$

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	1.1	0.592	-29.55	1.120033
1	1.12003384095	-0.02389	-31.95166	1.119286

Der interne Zinsfuß liegt bei etwa p_{intern} = 11,92 [%].

(Ein Iterationsdurchgang bzw. eine Näherung genügt!)

10.) **Lineare Optimierung und Simplexalgorithmus**

Gesucht ist das Maximum der Funktion G(x,y) = 2x + 3y unter Berücksichtigung folgender Nebenbedingungen:

I.) $x + y \leq 15$ und II.) $x + 2y \leq 20$

a) Wie lauten die Nichtnegativitätsbedingungen?

b) Stellen Sie den Simplex-Raum graphisch dar.

c) Ermitteln Sie die Zielfunktion für G = 18 und G = 30.

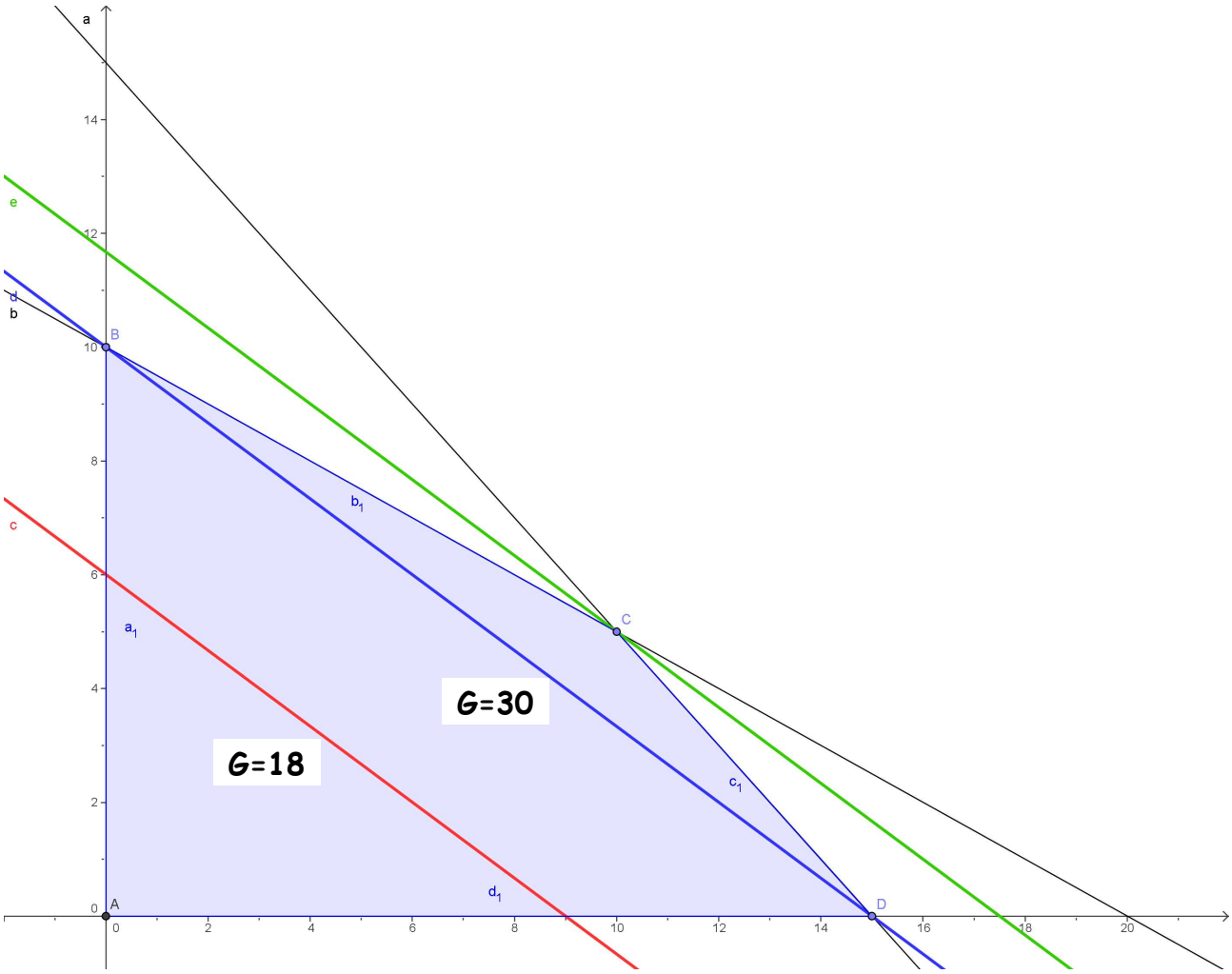
d) Bestimmen Sie graphisch das Maximum von G.

e) Bestimmen Sie das Maximum mit Hilfe des Simplexalgorithmus.

Lösung:

$a)$ *Nichtnegativitätsbedingungen*: $x \geq 0 \quad \wedge \quad y \geq 0$

b) – d)



e)

<u>Bedingungen:</u> **x = Anzahl der Produkte P_1 und y = Anzahl der Produkte P_2**

$x + y \leq 15$

$x + 2y \leq 20$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x \geq 0$ *und* $y \geq 0$

<u>Zielfunktion:</u> $2x + 3y = Z \rightarrow \max.$

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & x & y & u_1 & u_2 & b \\
I.) & 1 & 1 & 1 & 0 & 15 \\
II.) & 1 & 2 & 0 & 1 & 20 \\
\hline
G: & 2 & 3 & 0 & 0 & Z
\end{array}
\xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot II.)}
$$

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
I.) & 1 & 1 & 1 & 0 & 15 \\
II.) & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 10 \\
\hline
G: & 2 & 3 & 0 & 0 & Z
\end{array}
\xrightarrow{I.)-II.)}
\xrightarrow{G-3\cdot II.)}
$$

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
I.) & \frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 5 \\
II.) & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 10 \\
\hline
G: & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & Z-30
\end{array}
\xrightarrow{2\cdot I.)}
$$

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
I.) & 1 & 0 & 2 & -1 & 10 \\
II.) & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 10 \\
\hline
G: & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & Z-30
\end{array}
\xrightarrow{II.)-\frac{1}{2}\cdot I.)}
\xrightarrow{G-\frac{1}{2}\cdot I.)}
$$

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
I.) & 1 & 0 & 2 & -1 & 10 \\
II.) & 0 & 1 & -1 & 1 & 5 \\
\hline
G: & 0 & 0 & -1 & -1 & Z-35
\end{array}
$$

Lösung: **x = 10** **y = 5** **=>** ***G* = 35**