Klausur: Mathematik
am Freitag, den 13. Januar 2012

Jürgen Meisel

Hilfsmittel: Mathematische Formelsammlung und nicht progr. Taschenrechner
Bearbeitungszeit: 60 Minuten

1.) **Extrema ohne Nebenbedingungen**

Ermitteln Sie die jeweiligen stationären Stellen der Funktionen

und untersuchen Sie diese Stellen auf ihre Extremwerteigenschaft.

Anmerkung: Eine Berechnung aller Funktionswerte soll erfolgen!

a) $$f(x,y) = x^4 + 2x^2 + 3y^2 - 6y$$

Lösung:

$$I.)\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 + 4x \overset{!}{=} 0 \quad\Rightarrow\quad 4x\left(x^2+1\right) = 0 \quad\Rightarrow\quad x = 0$$

$$II.)\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6y - 6 \overset{!}{=} 0 \quad\Rightarrow\quad y = 1$$

Es resultiert eine stationäre Stelle: $S(0 \mid 1 \mid -3)$

$$Hesse-Matrix:\quad H(f) = \begin{pmatrix} 12x^2+4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad H(f_S) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad f_{xx} = 4 > 0 \quad\wedge\quad \det(H) = 24 > 0 \quad\Rightarrow\quad Min(0 \mid 1 \mid -3)$$

b) $$f(x,y) = x^2 + 10x - 6xy + 2y^2 - 2y - 5$$

Lösung:

$$\left.\begin{aligned} I.)\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x + 10 - 6y \overset{!}{=} 0 \\ II.)\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -6x + 4y - 2 \overset{!}{=} 0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{3\cdot I.)+II.)} \quad y = 2 \quad\Rightarrow\quad x = 1$$

Es resultiert eine stationäre Stelle: $S(1 \mid 2 \mid -2)$

$$Hesse-Matrix:\quad H(f) = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \det(H) = -28 < 0 \quad\Rightarrow\quad SP(1 \mid 2 \mid -2)$$

2.) **Ableitungen**

Bilden Sie bei den folgenden Funktionen jeweils die ersten partiellen Ableitungen:

a) $$f(x,y,z) = \frac{y+x^4}{x^3} + y^3z^2$$

Lösung:

$$f_x(x,y,z) = -3yx^{-4} + 1 = (-3)\frac{y}{x^4} + 1$$

$$f_y(x,y,z) = \frac{1}{x^3} + 3y^2z^2 \qquad f_z(x,y,z) = 2y^3z$$

b) $$f(x,y) = e^{x^2} \cdot \left(\frac{1}{2}x^3 - 4y\right)$$

Lösung:

$$f_x(x,y) = 2x \cdot e^{x^2} \cdot \left(\frac{1}{2}x^3 - 4y\right) + e^{x^2} \cdot \frac{3}{2}x^2$$

$$f_y(x,y) = e^{x^2} \cdot (-4)$$

3.) **Optimum mit Nebenbedingungen**

Gegeben sei die Funktion $q(x,y) = 5x^{0,2}y^{0,8}$

Die Nebenbedingung lautet: $180 = 6x+9y$

Bestimmen Sie das maximal mögliche Produktionsergebnis q_{max} .

Lösung:

$$L(x,y,\lambda) = 5x^{0,2}y^{0,8}+\lambda(180-6x-9y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) = \frac{y^{0,8}}{x^{0,8}}-6\lambda \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda = \frac{y^{0,8}}{6\cdot x^{0,8}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) = 4\cdot\frac{x^{0,2}}{y^{0,2}}-9\lambda \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{9}\cdot\frac{x^{0,2}}{y^{0,2}}$$

$$Austauschverhältnis:$$

$$\frac{y^{0,8}}{6\cdot x^{0,8}} = \frac{4}{9}\cdot\frac{x^{0,2}}{y^{0,2}} \Rightarrow y = \frac{8}{3}x$$

$$eingesetzt\ in\ NB:$$

$$180 = 6x+9y \xrightarrow{y = \frac{8}{3}x} 180 = 6x+9\cdot\frac{8}{3}x$$

$$\Rightarrow 180 = 30x \Rightarrow x=6 \Rightarrow y=16$$

$$\Rightarrow q(6\mid 16) = 5\cdot 6^{0,2}\cdot 16^{0,8} \approx 65,75$$

4.) **Lineare Gleichungssysteme und Matrizengleichungen**

a) Lösen Sie das LGS mit einem Verfahren Ihrer Wahl:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 10 & 9 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 36 \\ 41 \end{pmatrix}$$

<u>**Lösung:**</u> $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

b) Für welche Werte von **t** ist die Matrix regulär?

$$\begin{pmatrix} k & 6 & -2k \\ 1 & k & -1 \\ 2 & k & 3 \end{pmatrix}$$

<u>**Lösung:**</u>

$$\det \begin{pmatrix} k & 6 & -2k \\ 1 & k & -1 \\ 2 & k & 3 \end{pmatrix} = 6\left(k^2 - 5\right) \rightarrow 6\left(k^2 - 5\right) = 0$$

$$\rightarrow |x| = \sqrt{5} \rightarrow M \text{ } regulär \Leftrightarrow k \in \Re \setminus \left\{\pm\sqrt{5}\right\}$$

c) Rechnen mit Matrizen

Bestimmen Sie die Ergebnisse aus den gegebenen Matrizen:

$$A=\begin{pmatrix} k & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 2k & -4 \\ 1 & k \end{pmatrix} \quad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) A^2+3B

Lösung:

$$\begin{pmatrix} k & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^2 + 3\cdot\begin{pmatrix} 2k & -4 \\ 1 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2-6 & 3k+3 \\ -2k-2 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6k & -12 \\ 3 & 3k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k^2+6k-6 & 3k-9 \\ -2k+1 & 3k-5 \end{pmatrix}$$

(ii) $(A-2E)^T+3(E-B)$

Lösung:

$$\left[\begin{pmatrix} k & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right]^T + 3\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2k & -4 \\ 1 & k \end{pmatrix}\right] =$$

$$\begin{pmatrix} k-2 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 3-6k & 12 \\ -3 & 3-3k \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} k-2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3-6k & 12 \\ -3 & 3-3k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-5k & 10 \\ 0 & 2-3k \end{pmatrix}$$

5.) **Newton-Iteration**

Gegeben Sie folgende Funktion:

$$f(x) \quad = \quad -x^3 + 4x + 6$$

Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion im Intervall **[2 ; 3]** .

Führen Sie zwei Iterationsschritte durch.

__**Lösung:**__

Startwert x = 2:

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	2	6	-8	2.75
1	2.75	-3.796875	-18.6875	2.54682274
2	2.5468227	-0.33218087	-15.4589182	2.52533476
3	2.5253347	-0.00351793	-15.1319470	2.52510228

Startwert x = 3:

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	3	-9	-23	2.608695652
1	2.60869565	-1.31815566	-16.4158790	2.528398053
2	2.52839805	-0.049942559	-15.17839014	2.525107680