Klausur: Mathematik
am Montag, den 14. Januar 2013

Jürgen Meisel

Hilfsmittel: Mathematische Formelsammlung und nicht progr. Taschenrechner
Bearbeitungszeit: 60 Minuten

1.) **Extrema ohne Nebenbedingungen** | 12 | |

Ermitteln Sie die beiden stationären Stellen der Funktion

$$f(x,y) \quad = \quad \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - y^2 + 4y + 2$$

und untersuchen Sie diese Stellen auf ihre Extremwerteigenschaft.

Anmerkung: Bitte Berechnung der Funktionswerte!

Lösung:

$$I.) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^2 - 4x \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x(x-4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad und \quad x_2 = 4$$

$$II.) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y + 4 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2$$

Es resultieren zwei stationäre Stellen: $S_1(0 \mid 2 \mid f_1) \quad und \quad S_2(4 \mid 2 \mid f_2)$

$$Hesse-Matrix: \quad H(f) = \begin{pmatrix} 2x-4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad H(f_{S_1}) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad f_{xx} = -4 < 0 \quad \wedge \quad \det(H) = 8 > 0 \quad \Rightarrow \quad Max(0 \mid 2 \mid 6)$$

$$\Rightarrow \quad H(f_{S_2}) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(H) = -8 < 0 \quad \Rightarrow \quad Sattelpunkt\left(4 \;\middle|\; 2 \;\middle|\; -\frac{14}{3}\right)$$

2.) **Ableitungen**

10	

Bilden Sie bei den folgenden Funktionen jeweils die ersten partiellen Ableitungen:

a) $f(x,y,z) = x^2y + y^2z - z$

Lösung:

$$f_x(x,y,z) = 2xy \qquad f_y(x,y,z) = x^2 + 2yz \qquad f_z(x,y,z) = y^2 - 1$$

b) $f(x,y) = x^2 \cdot \left(e^{xy} - 2y\right)$

Lösung:

$$f_x(x,y) = 2x \cdot \left(e^{xy} - 2y\right) + x^2 \cdot y \cdot e^{xy}$$

$$f_y(x,y) = x^2 \cdot \left(x \cdot e^{xy} - 2\right) = x^3 \cdot e^{xy} - 2x^2$$

3.) **Newton-Iteration**

6	

Bestimmen Sie eine der beiden Nullstelle der Funktion f(x) im Intervall [0 ; 2] mittels zweier Näherungsschritte:

$$f(x) = -2x^4 + 2x^2 + 3x - 2$$

Lösung:

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	0	-2	3	0.6666667
1	0.666667	0.49382716	3.2962962	0.5168539
2	0.5168539	-0.05788763	3.9628451	0.5314615
3	0.5314615	-0.000270244	3.9249498	0.5315303

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	1	1	-1	2
1	2	-20	-53	1.622641
2	1.622641	-5.7311588	-24.688306	1.390500
3	1.3905009	-1.4383001	-12.9461831	1.2794025

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	2	-20	-53	1.6226415
1	1.62264151	-5.7311589	-24.688307	1.3905009
2	1.39050089	-1.43830007	-12.94618	1.2794025
3	1.279402499	-0.2467427264	-8.636122	1.2508315

4.) **Optimum mit Nebenbedingungen** | 12 | |

Gegeben sei die Funktion $f(a,b) \quad = \quad 40a - 0{,}02a^2 + 36b - 0{,}03b^2$

Die Budgetnebenbedingung lautet: $1.950 \quad = \quad 4a + 3b$

a) Bestimmen Sie das maximal mögliche Produktionsergebnis f_{max} .

Lösung:

$$L(a,b,\lambda) \quad = \quad 40a - 0{,}02a^2 + 36b - 0{,}03b^2 + \lambda(1.950 - 4a - 3b)$$

$$\frac{\partial L}{\partial a}(a,b,\lambda) \quad = \quad 40 - 0{,}04a - 4\lambda \quad \stackrel{!}{=} \quad 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \quad = \quad 10 - 0{,}01a$$

$$\frac{\partial L}{\partial b}(a,b,\lambda) \quad = \quad 36 - 0{,}06b - 3\lambda \quad \stackrel{!}{=} \quad 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \quad = \quad 12 - 0{,}02b$$

$$\textit{Austauschverhältnis}:$$

$$10 - 0{,}01a \quad = \quad 12 - 0{,}02b \quad \Rightarrow \quad a \quad = \quad 2b - 200$$

$$\textit{eingesetzt in NB}:$$

$$1.950 \quad = \quad 4a + 3b \quad \xrightarrow{a \;=\; 2b-200} \quad 1.950 \quad = \quad 8b - 800 + 3b$$

$$\Rightarrow \quad 2.750 \quad = \quad 11b \quad \Rightarrow \quad b = 250 \quad \Rightarrow \quad a = 300$$

$$\Rightarrow \quad f(300 \mid 250) \quad = \quad 17.325$$

b) Wie groß müsste das Budget sein, damit bei sonst gleichen Angaben der Lösungswert für a bei 200 liegt?

Lösung:

$$a \quad = \quad 200 \quad \xrightarrow{a \;=\; 2b-200} \quad 200 \quad = \quad 2b - 200 \quad \rightarrow \quad b = 200$$

$$\xrightarrow{Budget} \quad budget \quad = \quad 4 \cdot 200 + 3 \cdot 200 \quad = \quad 1.400$$

10	

5.) **Lineare Gleichungssysteme**

Gegeben sei folgendes LGS:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Für welchen Wert von **t** hat das LGS **keine eindeutige** Lösung?

Lösung:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & t \end{vmatrix} = t+3+1-3+1+t = 2t+2 = 0 \rightarrow t = -1$$

b) Bestimmen Sie die Lösung für **t = -1**.

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ z-0{,}5 \\ z \end{pmatrix} mit\ z \in \Re$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 2\ (1) \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 1\ (2) \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 4\ (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 2\ (1) \\ 2x_2 - 2x_3 &= -1\ (2) \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 4\ (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 2\ (1) \\ 2x_2 - 2x_3 &= -1\ (2) \\ 4x_2 - 4x_3 &= -2\ (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 2\ (1) \\ x_2 - x_3 &= -1/2\ (2) \\ 4x_2 - 4x_3 &= -2\ (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 3/2\ (1) \\ x_2 - x_3 &= -1/2\ (2) \\ 4x_2 - 4x_3 &= -2\ (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 3/2\ (1) \\ x_2 - x_3 &= -1/2\ (2) \\ 0 &= 0\ (3) \end{aligned}$$

Unendlich viele Lösungen: 1 Parameter wählbar

$x_1 = 3/2$

$x_2 = -1/2 \quad + x_3$

x_3 beliebig wählbar

6.) **Integralrechnung** | 10 | |

Die Angebots- und die Nachfragefunktionen sind durch folgende Funktionsgleichungen gegeben:

$$p_A(x) = 0{,}15x^2 + 2{,}25 \quad und \quad p_N(x) = -0{,}1x^2 + 22{,}5$$

a) Berechnen Sie das Marktgleichgewicht.

Lösung:

$$p_A(x) = p_N(x) \rightarrow 0{,}15x^2 + 2{,}25 = -0{,}1x^2 + 22{,}5$$
$$\rightarrow 0{,}25x^2 = 20{,}25 \rightarrow x^2 = 81 \rightarrow |x| = 9$$
$$\rightarrow p_N(9) = 14{,}4$$

b) Bestimmen Sie die Konsumenten- und Produzentenrente.

Lösung:

Konsumentenrente:

$$K_R = \int_0^9 \left(-0{,}1x^2 + 22{,}5\right)dx - 9 \cdot 14{,}4 = \left[-\frac{1}{30}x^3 + 22{,}5x\right]_0^9 - 129{,}6 = 48{,}6$$

Produzentenrente:

$$P_R = 9 \cdot 14{,}4 - \int_0^9 \left(0{,}15x^2 + 2{,}25\right)dx = 129{,}6 - \left[0{,}05x^3 + 2{,}25x\right]_0^9 = 72{,}9$$