Klausur: Mathematik am Donnerstag, den 23. Januar 2014

Jürgen Meisel

Hilfsmittel: Mathematische Formelsammlung und nicht progr. Taschenrechner
Bearbeitungszeit: 60 Minuten

1.) **Extrema ohne Nebenbedingungen** | 10 | |

Ermitteln Sie die stationäre Stelle der Funktion und untersuchen Sie diese Stelle auf ihre Extremwerteigenschaft.

Bitte mit Berechnung des Funktionswerts.

$$f(x,y) = -2x^2 + 2xy - y^2 + 18x - 14y + 4$$

Lösung:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= -4x + 2y + 18 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= 2x - 2y - 14 \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad Max(2 \mid -5 \mid 57) \quad mit \quad H(f) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

| 20 | |

2.) **Ableitungen**

Bilden Sie bei den folgenden Funktionen jeweils die ersten partiellen Ableitungen:

a) $f(x,y,z) = x^2 \cdot y \cdot e^{4xyz}$

Lösung:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 2x \cdot y \cdot e^{4xyz} + 4x^2 \cdot y^2 \cdot z \cdot e^{4xyz}$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = x^2 \cdot e^{4xyz} + 4x^3 \cdot y \cdot z \cdot e^{4xyz}$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 4x^3 \cdot y^2 \cdot e^{4xyz}$$

b) $f(x,y) = \frac{x^4}{y}$

Lösung:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{4x^3}{y} \quad und \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -\frac{x^4}{y^2}$$

c) $f(x,y,z) = 3xyz + x^2y - xz^3$

Lösung:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 3yz + 2xy - z^3 \qquad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = 3xz + x^2$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 3xy - 3xz^2$$

10	

3.) **Optimum mit Nebenbedingungen**

Bestimmen Sie das Extremum der Funktion unter der gegebenen Nebenbedingung:

$$f(x,y) = x^{0,4} \cdot y^{0,6} \qquad unter\ NB: \quad x + 4y \leq 140$$

Lösung:

$$Ansatz: \quad L(x,y,k) = x^{0,4} \cdot y^{0,6} + k(140 - x - 4y)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L(x,y,k)}{\partial x} &= 0,4 \cdot \frac{y^{0,6}}{x^{0,6}} - k = 0 \\ \frac{\partial L(x,y,k)}{\partial y} &= 0,6 \cdot \frac{x^{0,4}}{y^{0,4}} - 4k = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad 0,4y = 0,15x \quad \rightarrow \quad y = \frac{3}{8}x$$

$$\rightarrow \quad x = 56 \quad \rightarrow \quad y = 21$$

4.) **Lineare Optimierung und Simplexalgorithmus**

16	

Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem:

$$g(x,y) \quad = \quad 6x+8y \quad \to \quad \max.$$

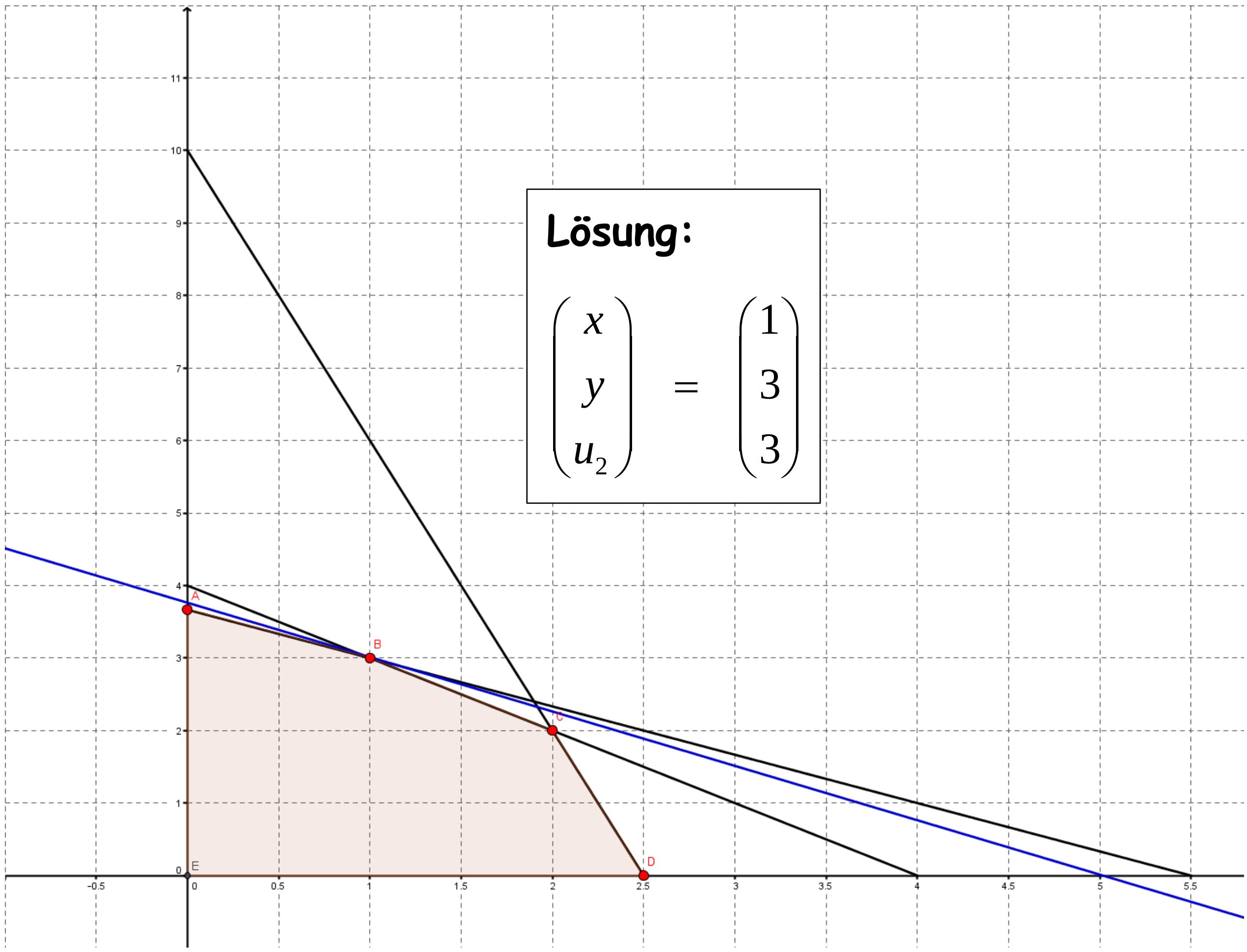
Nebenbedingungen:

$$\begin{array}{c|l} (1) & 2x+3y \leq 11 \\ (2) & 4x+y \leq 10 \\ (3) & x+y \leq 4 \end{array}$$

a) Graphische Lösung

b) Lösung mittels Simplexalgorithmus

Lösung:



Simplexalgorithmus:

	x	y	u_1	u_2	u_3	b
i	2	3	1	0	0	11
ii	4	1	0	1	0	10
iii	1	1	0	0	1	4
ZF	6	8	0	0	0	g

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}\cdot i}$$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b
i	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{11}{3}$
ii	4	1	0	1	0	10
iii	1	1	0	0	1	4
ZF	6	8	0	0	0	g

$$\xrightarrow[\substack{iii-i \\ ZF-8\cdot i}]{ii-i}$$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b
i	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{11}{3}$
ii	$\frac{10}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{19}{3}$
iii	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$
ZF	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{8}{3}$	0	0	$g-\frac{88}{3}$

$$\xrightarrow{3\cdot iii}$$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b
i	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{11}{3}$
ii	$\frac{10}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{19}{3}$
iii	1	0	-1	0	3	1
ZF	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{8}{3}$	0	0	$g-\frac{88}{3}$

$$\xrightarrow[\substack{ii-\frac{10}{3}\cdot iii \\ ZF-\frac{2}{3}\cdot iii}]{i-\frac{2}{3}\cdot iii}$$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b
i	0	1	1	0	-2	3
ii	0	0	3	1	-10	3
iii	1	0	-1	0	3	1
ZF	0	0	-2	0	-2	$g-30$

5.) **Wachstum und Exponentialfunktionen**

14	

Zum Zeitpunkt **t** = 0 hatte die Firma Zwerg 12.800 Mitarbeiter. Aufgrund zu erwartender positiver Entwicklungen werden in den kommenden 4 Jahren voraussichtlich 1.500 Mitarbeiter neu eingestellt.

a) Welches durchschnittliche jährliche Wachstum in % liegt hier vor?

b) Ermitteln Sie die exponentielle Wachstumsfunktion zur Basis e.

c) Wann hätte die Firma die Grenze von 20.000 Mitarbeitern erreicht?

Der Konkurrent – die Firma Herkules – hat zum Zeitpunkt **t** = 0 insgesamt 16.400 Mitarbeiter.

Gehen Sie bei der folgenden Fragestellung unabhängig von den Ergebnissen aus den obigen Teilaufgaben von folgenden Wachstumsfunktionen aus:

$$\begin{aligned} &\text{Firma Zwerg:} && f_{Zwerg}(t) = 12.800 \cdot e^{0,02 \cdot t} \\ &\text{Firma Herkules:} && f_{Herkules}(t) = 16.400 \cdot e^{-0,018 \cdot t} \end{aligned}$$

d) Wann werden beide Firmen die gleiche Mitarbeiterzahl haben?

Lösung:

a) $$a = \sqrt[4]{\frac{14.300}{12.800}} = 1,0281 \rightarrow f(t) = 12.800 \cdot 1,0281^t$$

b) $$e^k = 1,0281 \rightarrow k = \ln(1,0281) \approx 0,0277124$$
$$\rightarrow f(t) = 12.800 \cdot e^{0,02771 \cdot t}$$

c) $$20.000 = 12.800 \cdot 1,0281^t \rightarrow t = \frac{\ln\frac{20.000}{12.800}}{\ln 1,0281} \approx 16,1\,[Jahre]$$

d)

$$12.800 \cdot e^{0,02 \cdot t} = 16.400 \cdot e^{-0,018 \cdot t} \xrightarrow[:12.800]{\cdot e^{0,018 \cdot t}} e^{0,02 \cdot t} \cdot e^{0,018 \cdot t} = \frac{16.400}{12.800}$$

$$\rightarrow e^{0,038 \cdot t} = 1,28125 \xrightarrow{\ln} t = \frac{\ln 1,28125}{0,038} \approx 6,52\,[Jahre]$$