Klausur: Mathematik (Donnerstag, den 08. Januar 2004)

Musterlösung

Dozent: Jürgen Meisel (FH Ludwigshafen)

1.) Differentialrechnung

a) Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = 10 \cdot e^{0,1x} \cdot x$

Defintionsmenge: $D = \Re$

Nullstellen: $10e^{0,1x} \cdot x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow N(0 \mid 0)$

Extremwerte:

$$f'(x) = e^{0,1x} \cdot (x+10) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = -10$$
$$f''(x) = e^{0,1x} \cdot (0,1 \cdot x + 2)$$
$$f''(-10) = \frac{1}{e} > 0 \Rightarrow Min\left(-10 \,\middle|\, -\frac{100}{e}\right)$$

Wendepunkte:

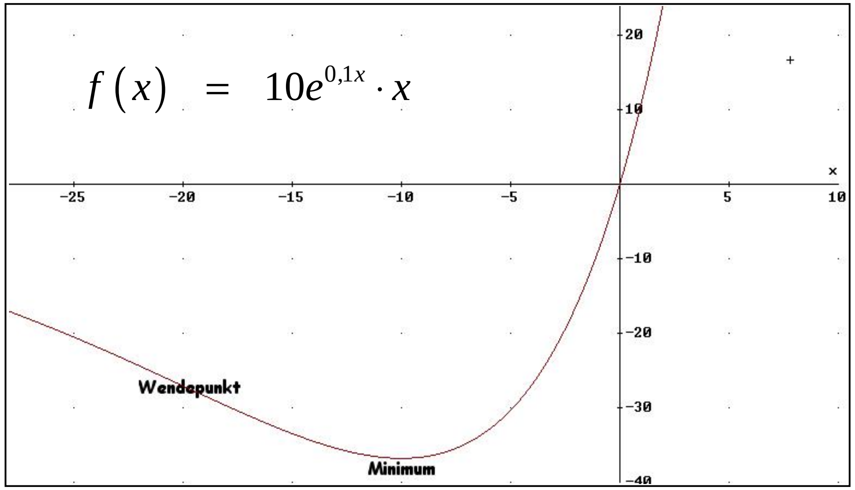
$$f''(x) = e^{0,1x} \cdot (0,1 \cdot x + 2) \overset{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow x = -20$$
$$\Rightarrow W\left(-20 \,\middle|\, -\frac{200}{e^2}\right)$$

Grenzwerte:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} 10e^{0,1x} \cdot x = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 10e^{0,1x} \cdot x = \lim_{x \to \infty} \frac{10 \cdot x}{e^{0,1x}} \overset{L'Hospital}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{10}{0,1 \cdot e^{0,1x}} = 0$$

Graph der untersuchten Funktion:



b) Extremwerte bei Funktionen mit mehreren Variablen

$$f(x,y) = x \cdot y + \frac{2}{5}(y-2)^2 + \frac{1}{4}(x+4)^2$$

Erste partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y + \frac{1}{2}(x+4)$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x + \frac{4}{5}(y-2)$$

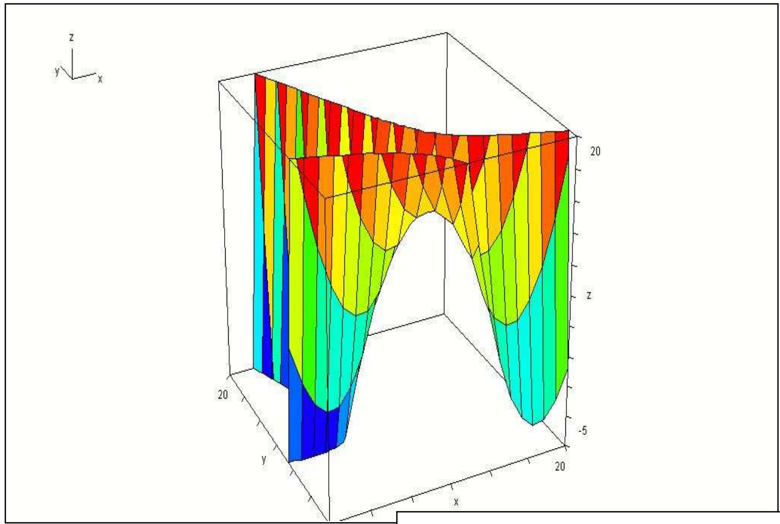
Zweite partielle Ableitungen (in Hesse – Matrix):

$$H(f) = \begin{pmatrix} 0,5 & 1 \\ 1 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Auswertung:

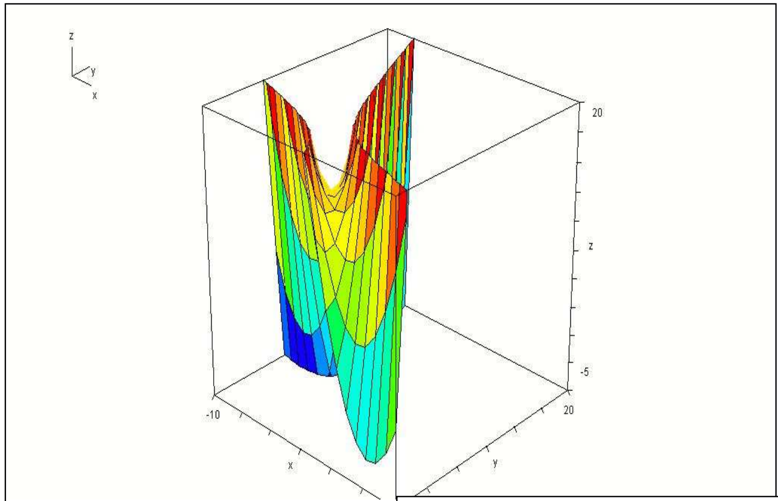
$$H_1 = 0,5 \quad und \quad H_2 = Det(H) = -0,6$$
$$\Rightarrow \quad es\ existieren\ keine\ Extremwerte$$

Graphische Darstellung: entlang der x-Achse (Vermutung: Maximum)



$$f(x,y) \quad = \quad x \cdot y + \frac{2}{5}(y-2)^2 + \frac{1}{4}(x+4)^2$$

Graphische Darstellung: entlang der y-Achse (Vermutung: Minimum)



$$f(x,y) \quad = \quad x \cdot y + \frac{2}{5}(y-2)^2 + \frac{1}{4}(x+4)^2$$

Widerspruch: eine Stelle kann nicht zugleich Maximum und Minimum sein!

2.) Elastizität

a) Bilden Sie den funktionalen Zusammenhang E(Y).

$$E(W) = 10\sqrt{1+2W} \qquad und \qquad W(Y) = 400 + 0{,}05Y$$

$$\Rightarrow \quad E(Y) \quad = \quad 10\sqrt{801+0{,}1Y}$$

b) Ermitteln Sie mit Hilfe der Elastizität, um wie viel Prozent sich bei einem Einkommen von 4.000,00 € der Energieverbrauch erhöht, wenn das Einkommen um 3 % steigt.

$$\varepsilon(Y) \quad = \quad \frac{E'(Y)}{E(Y)} \cdot Y$$

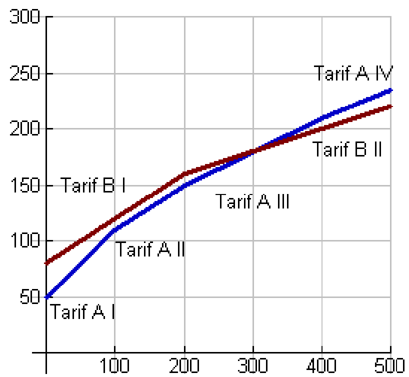
$$\varepsilon(Y) \quad = \quad \frac{10 \cdot \frac{1}{2} \cdot (801+0{,}1Y)^{-\frac{1}{2}} \cdot 0{,}1}{10 \cdot \sqrt{801+0{,}1Y}} \cdot Y \quad = \quad \frac{Y}{20 \cdot (801+0{,}1Y)}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon(4.000) \quad = \quad \frac{4.000}{20 \cdot 1.201} \quad \approx \quad \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{6} \cdot 3[\%] \quad = \quad \frac{1}{2}[\%]$$

3.) Lineare Funktionen

a) Graph:



Tarif A:

I.)	f(x) = 50 + 0,6x	x ∈ [0;100]
II.)	f(x) = 70 + 0,4x	x ∈]100;200]
III.)	f(x) = 90 + 0,3x	x ∈]200;400]
IV.)	f(x) = 110 + 0,25x	x ∈]400;∞[

Tarif B:

I.)	f(x) = 80 + 0,4x	x ∈ [0;200]
II.)	f(x) = 120 + 0,2x	x ∈]200;500]
III.)	f(x) = 170 + 0,1x	x ∈]500;∞[

b)

Tarif	150 km	350 km	750 km
A	50+60+20 = 130	110+40+45 = 195	110+40+60+87,50 = 297,50
B	80+60 = 140	160+30 = 190	160+60+25 = 245,00

c) Schnittpunkt (Wann sind die Tarife identisch?) => Intervall [300;400]

$$\begin{aligned} 90+0,3x &= 120+0,2x \\ 0,1x &= 30 \\ x &= 300 \\ \Rightarrow\ S(300 \mid 180) \end{aligned}$$

4.) Summenzeichen

Teil 1:

$$a)\ \sum_{i=1}^{4} i^2 = 1+4+9+16 \qquad b)\ \sum_{i=-1}^{2} \frac{i}{3i-1} = \frac{1}{4}+0+\frac{1}{2}+\frac{2}{5}$$

Teil 2:

$$a)\ 2-4+6-8+10-12 = \sum_{i=1}^{6} (-1)^{i+1}\cdot(2i)$$

$$b)\ \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6} = \sum_{i=1}^{5} \frac{i}{i+1}$$

Teil 3:

$$\sum_{i=1}^{5000} (2i-1) = 2\cdot\sum_{i=1}^{5000} i - \sum_{i=1}^{5000} 1 = 25.000.000$$

Teil 4:

$$\sum_{i=1}^{n} 5i = 275 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} i = 55 \Rightarrow n = 10$$

5.) Invertierung von Matrizen

Behauptung: $A * A^{-1} = E$

Beweis:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} * \frac{1}{ad-bc} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ba \\ cd-dc & -cb+da \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.) Extremwerte unter Nebenbedingungen

Ein Unternehmen besitzt die Produktionsfunktion $q(A,K) = 2\,A^{\frac{1}{4}}\,K^{\frac{3}{4}}$.

Die Kosten für den Produktionsfaktor Arbeit A sind 5 GE, für den Faktor Kapital K sind 3 GE aufzuwenden.

a) Wie groß ist der Output für A = 10.000 und K = 256.

$$q(10.000;256) = 2\cdot 10.000^{\frac{1}{4}}\cdot 256^{\frac{3}{4}} = 1.280$$

b) Bestimmen Sie die Funktionsvorschrift für die Kostenfunktion.

$$\mathrm{K}(A,K) = 5\cdot A + 3\cdot K$$

c) Wie hoch ist der maximale Output, wenn die Kosten 900 GE nicht überschreiten dürfen?

$$L(A,K,\lambda) = 2\,A^{\frac{1}{4}}\,K^{\frac{3}{4}} + \lambda\cdot(900-5A-3K)$$

$$\frac{\partial L(A,K,\lambda)}{\partial A} = \frac{1}{2}A^{-\frac{3}{4}}K^{\frac{3}{4}} - 5\lambda \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda = \frac{K^{\frac{3}{4}}}{10A^{\frac{3}{4}}}$$

$$\frac{\partial L(A,K,\lambda)}{\partial K} = \frac{3}{2}A^{\frac{1}{4}}K^{-\frac{1}{4}} - 3\lambda \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda = \frac{A^{\frac{1}{4}}}{2K^{\frac{1}{4}}}$$

$$\mathit{Austauschverhältnis:}\quad K = 5A$$

$$\mathit{eingesetzt\ in\ NB:}\quad A = 45 \quad \mathit{und} \quad K = 225$$

$$q(45;225) = 2\cdot 45^{\frac{1}{4}}\cdot 225^{\frac{3}{4}} = 90\cdot 5^{\frac{3}{4}} = 300,93$$

d) Wie hoch sind die minimalen Kosten, wenn ein Output von 80 ME erreicht werden soll.

$$\textit{gleiches Austauschverhältnis}: \quad K = 5A$$

$$\textit{eingesetzt in neue NB}\left(q(x)\right): \quad A = \frac{40}{5^{\frac{3}{4}}} \quad \textit{und} \quad K = \frac{200}{5^{\frac{3}{4}}}$$

$$\mathrm{K}\left(\frac{40}{5^{\frac{3}{4}}};\frac{200}{5^{\frac{3}{4}}}\right) = 5\cdot\frac{40}{5^{\frac{3}{4}}}+3\cdot\frac{200}{5^{\frac{3}{4}}} = 160\cdot 5^{\frac{1}{4}} = 239{,}26$$

e) Es liegt die Situation q (10.000 / 256) vor.

Wieviel Kapital muss bei einer Reduzierung von 5.904 Einheiten Arbeit hinzugefügt werden, damit das Produktionsniveau gehalten werden kann?

$$q(10.000;256) = 2\cdot 10.000^{\frac{1}{4}}\cdot 256^{\frac{3}{4}} = 1.280$$

$$q(4.096;K) = 2\cdot 4.096^{\frac{1}{4}}\cdot K^{\frac{3}{4}} \overset{!}{=} 1.280$$

$$\Rightarrow \quad K = 80^{\frac{4}{3}} = 344{,}71$$

7.) Materialberechnungen mit Matrizen

a) Bestimmen Sie die Matrix, die angibt, wie viel ME an pflanzlichen Rohstoffen pro ME der Präparate benötigt werden.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 16 & 18 \\ 17 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) Bestimmen Sie die Inverse zu M_{GE}.

$$M_{GE} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad M_{GE}^{-1} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Das Unternehmen verarbeitet 50 ME an G_1 und 90 ME an G_2. Wieviele Präparate von E_1 und E_2 können damit hergestellt werden?

$$\begin{array}{lcc|cl} I.) & 1 & 3 & 50 & \xrightarrow{II-4\cdot I} \\ II.) & 4 & 2 & 90 & \\ \hline I.) & 1 & 3 & 50 & \xrightarrow{II\cdot\left(-\frac{1}{10}\right)} \\ II.) & 0 & -10 & -110 & \\ \hline I.) & 1 & 3 & 50 & \xrightarrow{I-3\cdot I} \\ II.) & 0 & 1 & 11 & \\ \hline I.) & 1 & 0 & 17 & \\ II.) & 0 & 1 & 11 & \end{array}$$

$$\textit{Ergebnis}: \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 11 \end{pmatrix}$$

d) Wieviele ME an Rohstoffen sind zur Herstellung von 20 ME des Präparats E_1 und 10 ME des Präparats E_2 notwendig?

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 16 & 18 \\ 17 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \\ 450 \end{pmatrix}$$

8.) Integralrechnung

Auf einem Markt existieren folgende Angebots- und Nachfragefunktionen:

Angebot: $p_A(x) = 4 + 2\sqrt{x}$

Nachfrage: $p_N(x) = 49 - \frac{1}{4}x$

a) Wo liegt das Marktgleichgewicht?

$$4 + 2\sqrt{x} = 49 - \frac{1}{4}x$$

$$\frac{1}{4}x + 2\sqrt{x} - 45 = 0$$

Substitution: $\sqrt{x} = a$

$$\frac{1}{4}a^2 + 2a - 45 = 0$$

$$a_1 = 10 \quad \vee \quad a_2 = -18$$

Resubstition: $\sqrt{x} = 10 \Rightarrow x = 100$

$\sqrt{x} = -18 \Rightarrow$ n. def.

Gleichgewichtsmenge: $x = 100$

Gleichgewichtspreis: $p = 4 + 2 \cdot \sqrt{100} = 24$

b) Ermitteln Sie die Konsumentenrente im Marktgleichgewicht.

$$K_R(x) = \int_0^{100} \left(49 - \frac{1}{4}x\right) dx - 100 \cdot 24$$

$$K_R(x) = \left[49x - \frac{1}{8}x^2\right]_0^{100} - 2.400$$

$$K_R(x) = 4.900 - 1.250 - 2.400$$

$$K_R(x) = 1.250$$

9.) Iteration mit „NJUTN"(?) oder wie heißt der Mathematiker?

Bestimmen Sie durch ein geeignetes Iterationsverfahren den Wert von $\sqrt{11}$ auf 3 Stellen genau.

$$x = \sqrt{11}$$

$$x^2 = 11$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = x^2 - 11$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 2x$$

Startwert: $x_0 = 3$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
0	3	-2	6	$3 - \frac{-2}{6} = \frac{10}{3}$
1	$\frac{10}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{20}{3}$	$\frac{10}{3} - \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{20} = \frac{199}{60}$

Berechneter Wert : 3,3166667

Tatsächlicher Wert : 3,3166274