Klausur: Mathematik **am Montag, den 13. Januar 2011**	Jürgen Meisel

Hilfsmittel: Mathematische Formelsammlung und nicht progr. Taschenrechner
Bearbeitungszeit: 60 Minuten

1.) **Ökonomische Anwendungen zur Integralrechnung**

Gegeben seien die Nachfragefunktion $p_{N;k}(x) = 12 - kx$,

die Angebotsfunktion $p_{A;k}(x) = kx^2 + 4k$ und die Gleichgewichtsmenge bei x = 4.

Ermitteln Sie die **Produzentenrente**.

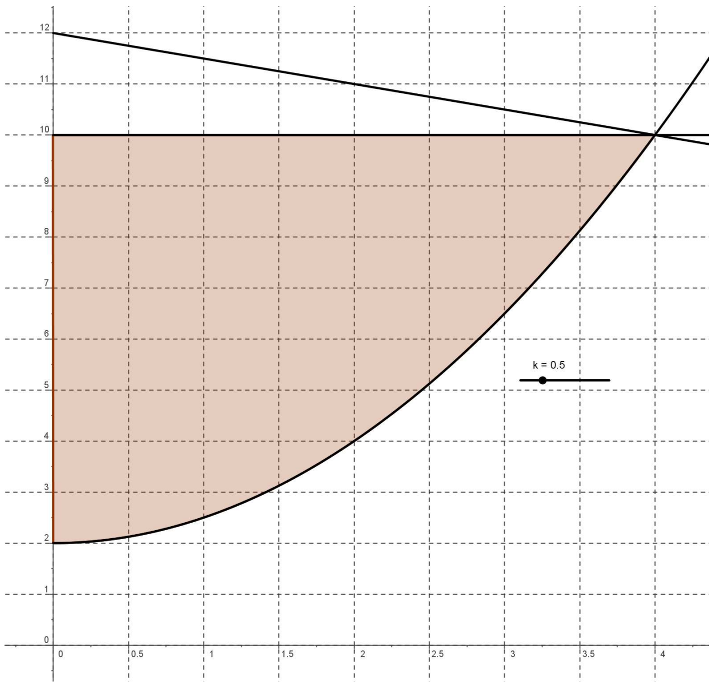
Lösung:

$$p_{A;k}(x) = p_{N;k}(x) \xrightarrow{x=4} 16k + 4k = 12 - 4k \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$p_{A;\frac{1}{2}}(4) = 10 \Rightarrow M(4 \mid 10)$$

$$P_R = 4 \cdot 10 - \int_0^4 \left(\frac{1}{2} x^2 + 2 \right) dx = 40 - \left[\frac{1}{6} x^3 + 2x \right]_0^4$$

$$P_R = 40 - 10\frac{2}{3} - 8 = 21\frac{1}{3}$$



2.) **Wachstumsprozesse**

In einer Bakterienpopulation werden 20 Individuen gezählt. Am nächsten Tag sind es bereits 24 Bakterien. Aufgrund des Platzbedarfes und des Nahrungsangebots wird die maximale Anzahl an Bakterien auf 350 geschätzt.

$$f(t) = G - (G-a) \cdot e^{-\lambda t}$$

a) Ermitteln Sie die Anzahl $f(t)$ der Bakterien nach **t** Tagen gemäß obiger Funktionsvorgabe, wenn begrenztes Wachstum angenommen werden kann.

Lösung:

$$24 = 350 - (350-20) \cdot e^{-\lambda} \rightarrow -326 = -\frac{330}{e^{\lambda}}$$

$$\rightarrow e^{\lambda} = \frac{330}{326}$$

$$\rightarrow \lambda = \ln\frac{330}{326} = 0{,}012195$$

$$\rightarrow f(t) = 350 - 330 \cdot e^{-0{,}012195\,t}$$

b) Nach wie vielen Tagen ist die Population auf 80 % ihres Endbestandes gewachsen?

Lösung:

$$280 = 350 - 330 \cdot e^{-0{,}012195\,t} \rightarrow -70 = -\frac{330}{e^{0{,}012195\,t}}$$

$$\rightarrow e^{0{,}012195\,t} = \frac{330}{70}$$

$$\rightarrow t = \frac{\ln\frac{330}{70}}{0{,}012195} = 127{,}15 \approx 128\,[Tage]$$

3.) **Extrema ohne Nebenbedingungen**

Die Funktion $f(x,y)$ besitzt eine stationäre Stelle.

$$f(x,y) = 3x^2 + 3y^2 + 4x + 11y - xy + 7$$

Untersuchen Sie die Funktion auf ihre Extremwerteigenschaft und berechnen Sie auch den zugehörigen Funktionswert.

Lösung:

$$I.)\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x + 4 - y \stackrel{!}{=} 0$$

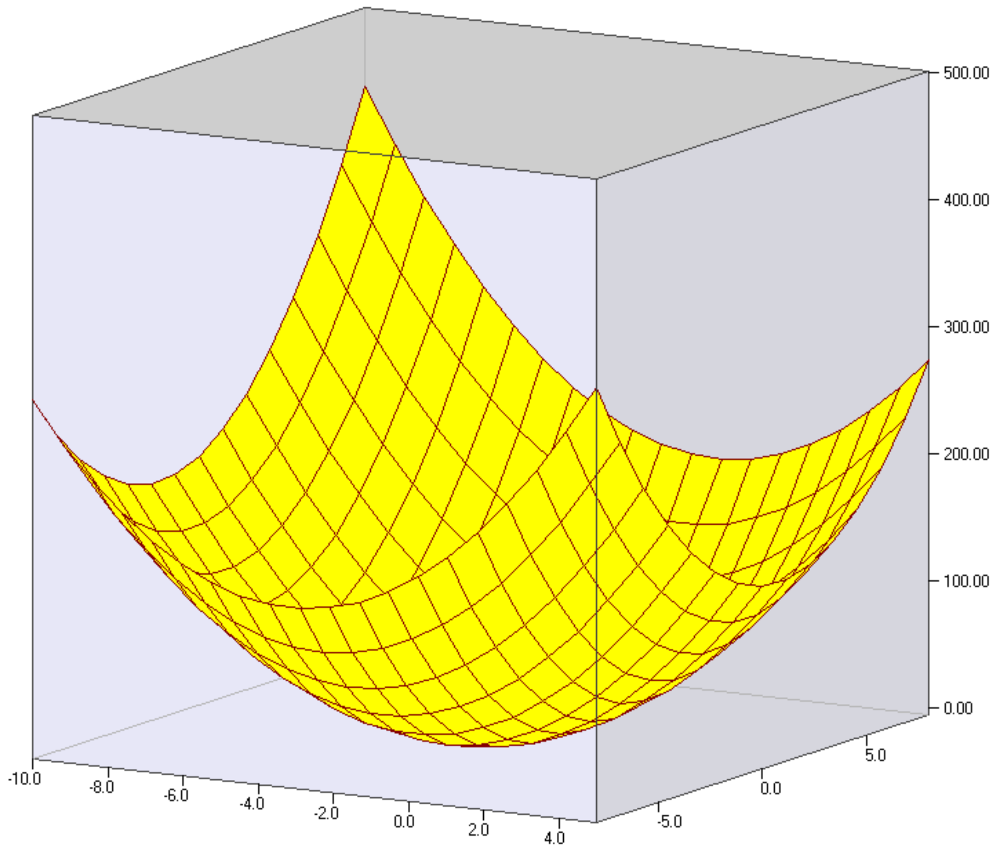
$$II.)\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6y + 11 - x \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightarrow \quad x = -1 \quad und \quad y = -2$$

Es resultiert die stationäre Stelle: $S(-1 \mid -2 \mid f)$

$$Hesse-Matrix: \quad H(f) = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad f_{xx} = 6 > 0 \quad \wedge \quad \det(H) = 37 > 0 \quad \Rightarrow \quad Min(-1 \mid -2 \mid -6)$$



4.) **Kurvenuntersuchung**

Gegeben ist die Funktion $f_k(x) = \dfrac{x+k}{e^x}$

Bestimmen Sie den **Extremwert und die Ortskurve** der Extrema;

Anmerkung: Es genügt die Verwendung der notwendigen Bedingung

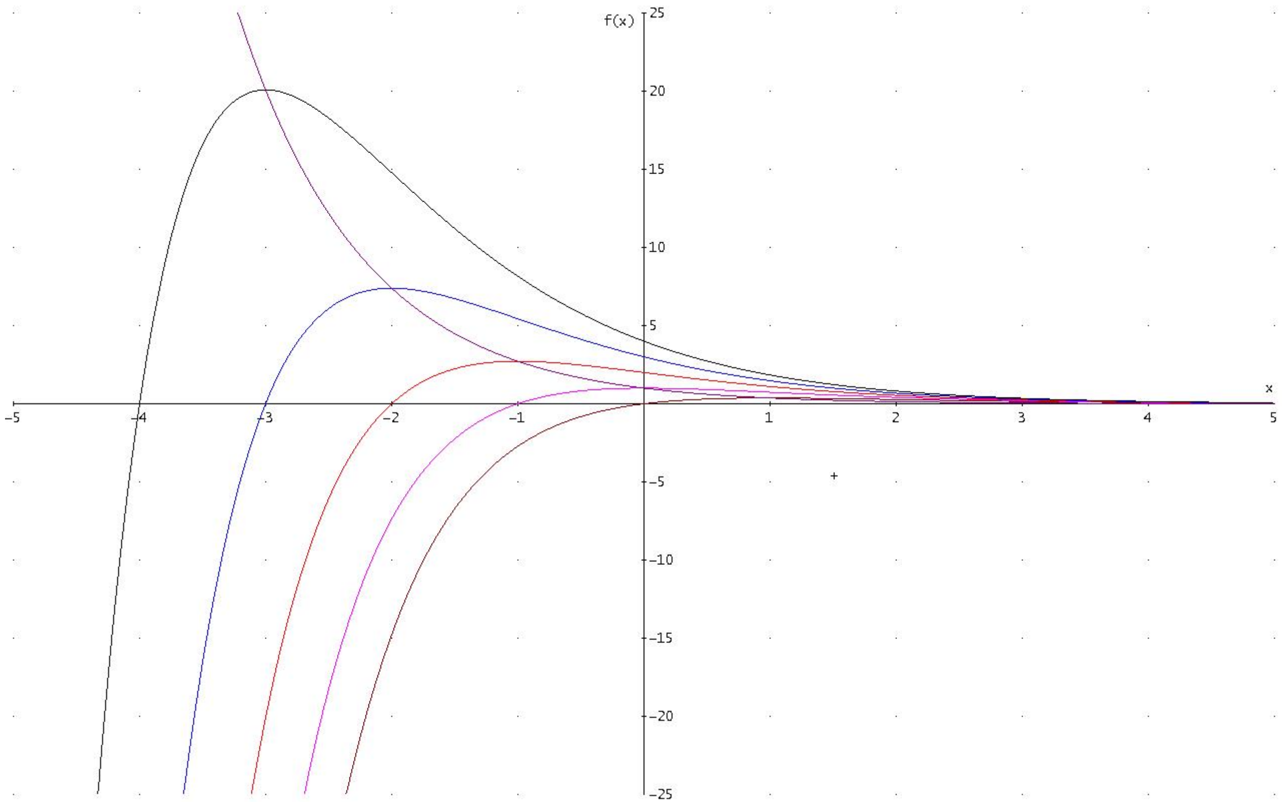
Lösung:

$$f_k'(x) = \frac{e^x - (x+k)e^x}{e^{2x}} = \frac{1-x-k}{e^x} = 0$$

$$\rightarrow \quad x = 1-k \quad \rightarrow \quad k = 1-x$$

$$Extremwert: \quad f_k(1-k) = \frac{1-k+k}{e^{1-k}} = \frac{1}{e^{1-k}} = e^{k-1}$$

$$Ortskurve: \quad y = e^{-x}$$



Von den folgenden beiden Aufgaben 5 und 6 ist nur eine zu lösen: Wählen Sie Aufgabe 5 oder Aufgabe 6 und lösen sie Ihre gewählte Aufgabe komplett!

5.) **Optimum mit Nebenbedingungen**

Teil I:

Bestimmen Sie das Maximum der Funktion $f(x,y) = 24x - x^2 + 16y - 2y^2$

unter der Nebenbedingung $44 = x^2 + 2y^2$.

Berechnen Sie auch den/die Funktionswerte.

Lösung:

$$L(x,y,\lambda) = 24x - x^2 + 16y - 2y^2 + \lambda\left(44 - x^2 - 2y^2\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) = 24 - 2x - 2\lambda x \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda = \frac{24-2x}{2x} = \frac{12-x}{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) = 16 - 4y - 4\lambda y \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda = \frac{16-4y}{4y} = \frac{4-y}{y}$$

Austauschverhältnis:

$$\frac{12-x}{x} = \frac{4-y}{y} \Rightarrow 12y - xy = 4x - xy \Rightarrow x = 3y$$

eingesetzt in NB:

$$44 = x^2 + 2y^2 \xrightarrow{x\ =\ 3y} 44 = 9y^2 + 2y^2$$

$$\Rightarrow 44 = 11y^2 \Rightarrow y = \pm 2 \Rightarrow x = \pm 6$$

zwei stationäre Stellen:

$$\Rightarrow f_1(6 \mid 2) = 132 \rightarrow \textit{Maximum}$$

$$\Rightarrow f_2(-6 \mid -2) = -220 \rightarrow \textit{Minimum}$$

Teil II:

Gegeben sei die Produktionsfunktion $q(x,y) = 4x^{0,25}y^{0,75}$

Eine Mengeneinheit von Faktor x kostet 10 €, eine Mengeneinheit von Faktor y kostet 18 €. Das Budget beträgt insgesamt 6.400,00 €. Bestimmen Sie das optimale Produktionsergebnis q_{max} .

<u>Lösung:</u>

$$L(x,y,\lambda) \quad = \quad 4x^{0,25}y^{0,75} + \lambda(6.400 - 10x - 18y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) \quad = \quad \frac{y^{0,75}}{x^{0,75}} - 10\lambda \quad \overset{!}{=} \quad 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \quad = \quad \frac{1}{10}\cdot\frac{y^{0,75}}{x^{0,75}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) \quad = \quad 3\cdot\frac{x^{0,25}}{y^{0,25}} - 18\lambda \quad \overset{!}{=} \quad 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \quad = \quad \frac{1}{6}\cdot\frac{x^{0,25}}{y^{0,25}}$$

$$\textit{Austauschverhältnis}:$$

$$\frac{1}{10}\cdot\frac{y^{0,75}}{x^{0,75}} \quad = \quad \frac{1}{6}\cdot\frac{x^{0,25}}{y^{0,25}} \quad \Rightarrow \quad y \quad = \quad \frac{5}{3}x$$

$$\textit{eingesetzt in NB}:$$

$$6.400 \quad = \quad 10x + 18y \quad \xrightarrow{y \;=\; \frac{5}{3}x} \quad 6.400 \quad = \quad 10x + 18\cdot\frac{5}{3}x$$

$$\Rightarrow \quad 6.400 \quad = \quad 40x \quad \Rightarrow \quad x = 160 \quad \Rightarrow \quad y = 266\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad q\left(160 \;\middle|\; 266\frac{2}{3}\right) \quad = \quad 4\cdot 160^{0,25}\cdot\left(266\frac{2}{3}\right)^{0,75} \quad \approx \quad 938,79$$

6.) **Matrizen, Determinanten und LGS**

Gegeben ist die Matrix A_t

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass die Matrix A_t immer regulär ist.

Lösung:

$$\det(A_t) = \det\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix} = 2t^2 - 2t + 1$$

$$\xrightarrow{\text{es gilt:}} 2t^2 - 2t + 1 \neq 0$$

$$\text{Beweis:} \quad t_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{4} \Rightarrow \text{Widerspruch}$$

b) Für welchen Wert von t gilt: $(A_t)^3 = E$ $\quad [E = \text{Einheitsmatrix}]$

Lösung:

$$A_t^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2t-2t^2 & t-t^2 \\ 4t-4 & 5t-4 & t^2+4t-3 \\ -2t+2 & t^2-4t+3 & t^3-2t+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow 2t - 2t^2 = 0 \Rightarrow t_1 = 0 \quad und \quad t_2 = 1$$

$$\rightarrow 5t - 4 = 1 \Rightarrow t = 1$$

Nur für t = 1 gilt die Behauptung.

c) Lösen Sie das LGS:

$$A_t \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 6t \\ -t-8 \\ 4-3t^2 \end{pmatrix}$$

Lösung: Cramer-Regel

$$x = \frac{\begin{pmatrix} 6t & t & 0 \\ -t-8 & -2 & -1 \\ 4-3t^2 & 1 & t \end{pmatrix}}{2t^2-2t+1} = \frac{4t^3-4t^2+2t}{2t^2-2t+1} = \frac{2t\left(2t^2-2t+1\right)}{2t^2-2t+1} = 2t$$

$$y = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 6t & 0 \\ -2 & -t-8 & -1 \\ 0 & 4-3t^2 & t \end{pmatrix}}{2t^2-2t+1} = \frac{8t^2-8t+4}{2t^2-2t+1} = \frac{4\left(2t^2-2t+1\right)}{2t^2-2t+1} = 4$$

$$z = \frac{\begin{pmatrix} 1 & t & 6t \\ -2 & -2 & -t-8 \\ 0 & 1 & 4-3t^2 \end{pmatrix}}{2t^2-2t+1} = \frac{-6t^3+6t^2-3t}{2t^2-2t+1} = \frac{-3t\left(2t^2-2t+1\right)}{2t^2-2t+1} = -3t$$

$$\Rightarrow \quad L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 4 \\ -3t \end{pmatrix} \right\}$$