Klausur: Mathematik
am Donnerstag, den 24. Januar 2008

Jürgen Meisel
FH Ludwigshafen

Zugelassene Hilfsmittel: Mathematische Formelsammlung und nicht progr. Taschenrechner
Bearbeitungszeit: 60 Minuten

1.) Berechnen mathematischer Ausdrücke

a) Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Summenausdrucks:

$$\sum_{t=1}^{200}(2t-4)$$

Lösung:

$$\sum_{t=1}^{200}(2t-4)=2\cdot\sum_{t=1}^{200}t-\sum_{t=1}^{200}4=2\cdot\frac{200\cdot 201}{2}-200\cdot 4=39.400$$

b) Bilden Sie die Entwicklung nach dem Binomischen Lehrsatz und vereinfachen Sie den Ausdruck so weit wie möglich:

$$(4x-2)^5$$

Lösung:

$$(4x-2)^5 = \binom{5}{0}(4x)^5\cdot(-2)^0+\binom{5}{1}(4x)^4\cdot(-2)^1+\binom{5}{2}(4x)^3\cdot(-2)^2$$

$$+\binom{5}{3}(4x)^2\cdot(-2)^3+\binom{5}{4}(4x)^1\cdot(-2)^4+\binom{5}{5}(4x)^0\cdot(-2)^5$$

$$(4x-2)^5 = 1.024x^5-2.560x^4+2.560x^3-1.280x^2+320x-32$$

c) Für welche Werte von $t\in\Re$ ist die Matrix singulär?

$$Det\begin{pmatrix}4 & -t\\ t^2 & -2\end{pmatrix}$$

Lösung:

$$Det(A) = Det\begin{pmatrix}4 & -t\\ t^2 & -2\end{pmatrix} = -8+t^3 = 0 \Rightarrow t = 2$$

$$\Rightarrow Det(A) \text{ singulär} \Leftrightarrow t=2$$

2.) **Kurvendiskussion**

Untersuchen Sie die Funktion $f_t(x)$ mit der Vorschrift

$$f_t(x) = tx^3 - 3t^2x \qquad mit \quad t > 0$$

nach folgenden Kriterien:

a) Nullstellen

b) Extrema

c) Wendepunkte

d) Ortskurve der Extremwerte

<u>Lösung:</u>

$$Nullstellen: \quad f_t(x) = xt\left(x^2 - 3t\right) \quad = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_{2/3} = \pm\sqrt{3t}$$

$$Extremwert(e):$$

$$f_t'(x) = 3tx^2 - 3t^2 \qquad f_t''(x) = 6tx$$

$$f_t'(x) = 3tx^2 - 3t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm\sqrt{t}$$

$$f_t''\left(\sqrt{t}\right) = 6t \cdot \sqrt{t} > 0 \qquad \Rightarrow \quad Min\left(\sqrt{t} \;\middle|\; -2t^2 \cdot \sqrt{t}\right)$$

$$f_t''\left(-\sqrt{t}\right) = 6t \cdot \left(-\sqrt{t}\right) < 0 \quad \Rightarrow \quad Max\left(-\sqrt{t} \;\middle|\; 2t^2 \cdot \sqrt{t}\right)$$

$$Wendepunkt(e):$$

$$f_t''(x) = 6tx \qquad f_t'''(x) = 6t$$

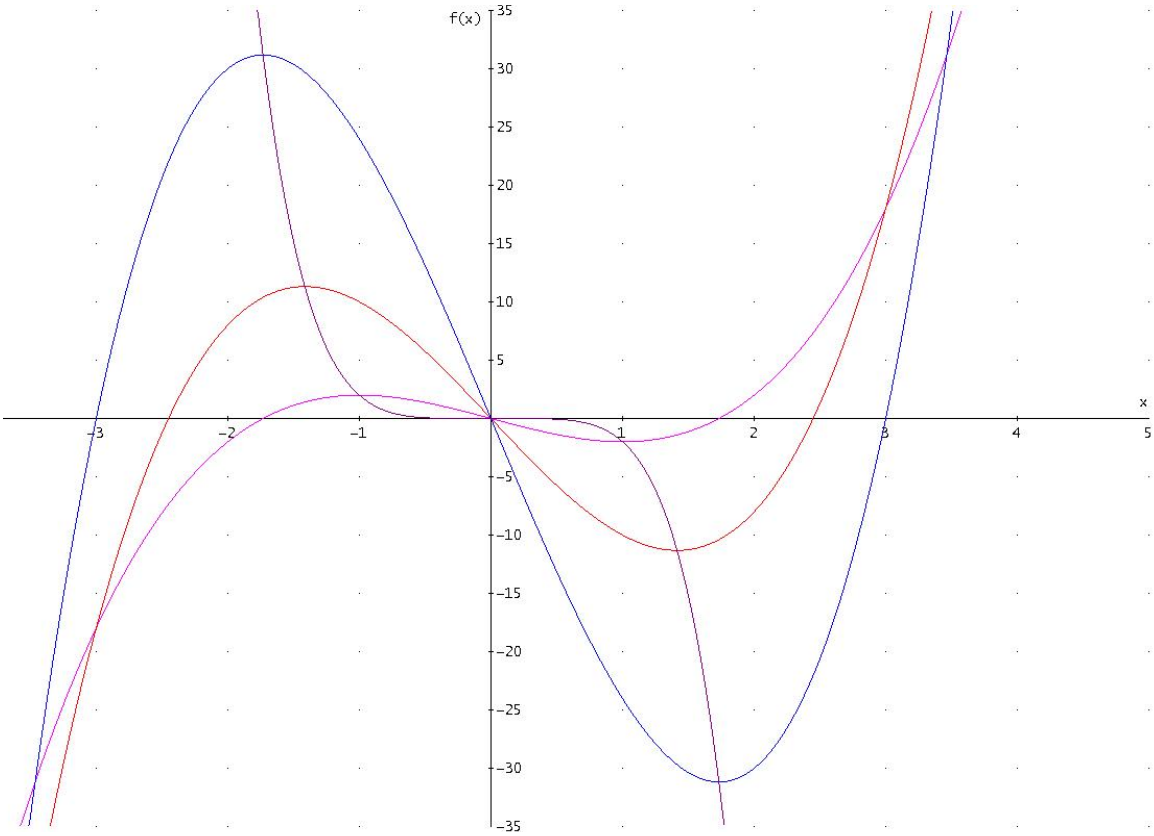
$$f_t''(x) = 6tx = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$$f_t'''(0) = 6t \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W(0 \mid 0)$$

$$Ortskurve:$$

$$Min\left(\sqrt{t} \;\middle|\; -2t^2 \cdot \sqrt{t}\right) \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{t} \quad \Rightarrow \quad t = x^2$$

$$\xrightarrow{einsetzen} \quad y = -2x^4 \cdot x = -2x^5$$



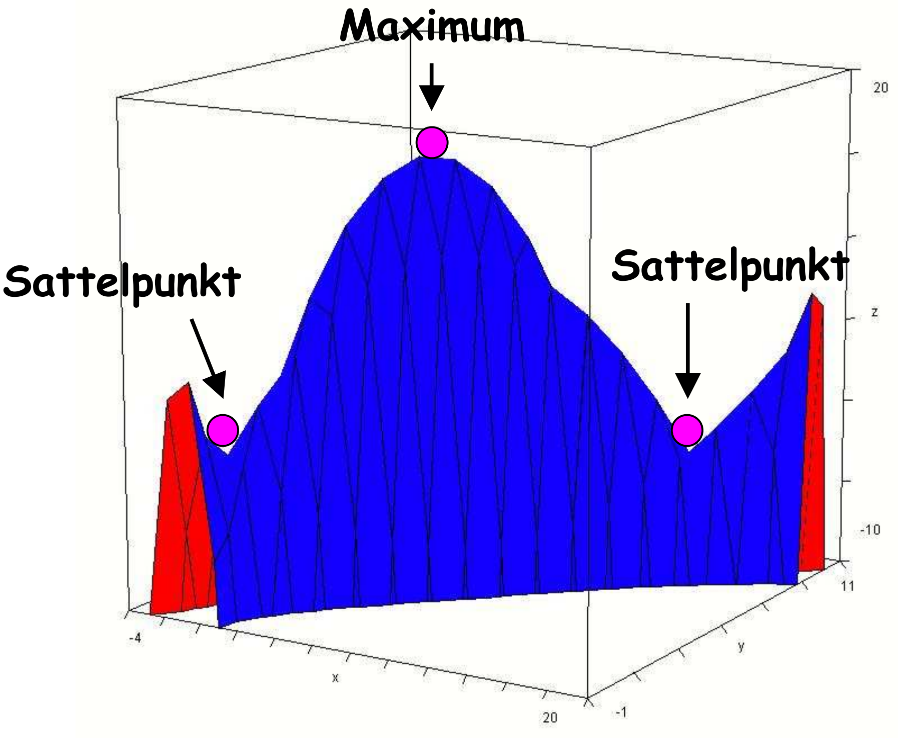
3.) **Optimum ohne Nebenbedingungen**

Ermitteln Sie die drei stationären Stellen der Funktion

$$f\left(x, y\right) \quad = \quad -4x^2 + 8xy - 2y^3 + xy^2$$

und untersuchen Sie diese Stellen auf ihre Extremwerteigenschaft.
Bitte berechnen Sie die Funktionswerte nur für Extremwertstellen aus.

Lösung:



$$f(x,y) = -4x^2+8xy-2y^3+xy^2$$

$$I.)\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -8x+8y+y^2 \overset{!}{=} 0 \quad\Rightarrow\quad x = y+\frac{1}{8}y^2$$

$$II.)\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 8x-6y^2+2xy \overset{!}{=} 0 \quad \xrightarrow{I.)\,in\,II.)} \quad 8\left(y+\frac{1}{8}y^2\right)-6y^2+2y\left(y+\frac{1}{8}y^2\right)=0$$

$$\Rightarrow\quad 8y+y^2-6y^2+2y^2+\frac{1}{4}y^3=0 \quad\Rightarrow\quad y\left(\frac{1}{4}y^2-3y+8\right)=0$$

$$\Rightarrow\quad y_1=0 \quad\wedge\quad y_{2/3}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{0,5}=\frac{3\pm1}{0,5} \quad\Rightarrow\quad y_2=8 \quad\wedge\quad y_3=4$$

$$\xrightarrow[x=y+\frac{1}{8}y^2]{einsetzen\ in} \quad x_1=0 \quad\wedge\quad x_2=16 \quad\wedge\quad x_3=6$$

Es resultieren 3 stationäre Stellen:

$$S_1(0\mid0\mid0) \quad\wedge\quad S_2(16\mid8\mid0) \quad\wedge\quad S_3(6\mid4\mid16)$$

Hesse − Matrix:

$$H(f)=\begin{pmatrix}-8 & 8+2y\\ 8+2y & -12y+2x\end{pmatrix} \quad\xrightarrow{S_i\ einsetzen}$$

$$H\left(f_{S_1}(0\mid0)\right)=\begin{pmatrix}-8 & 8\\ 8 & 0\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \det(H)<0 \quad\Rightarrow\quad Sattelpunkt$$

$$H\left(f_{S_2}(16\mid8)\right)=\begin{pmatrix}-8 & 24\\ 24 & -64\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \det(H)<0 \quad\Rightarrow\quad Sattelpunkt$$

$$H\left(f_{S_3}(6\mid4)\right)=\begin{pmatrix}-8 & 16\\ 16 & -36\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \det(H)>0 \quad\wedge\quad f_{xx}<0 \quad\Rightarrow\quad Max(6\mid4\mid16)$$

4.) **Optimum mit Nebenbedingungen**

Student Rudi Clever befindet sich in intensiver Klausurvorbereitung.
Dabei ernährt er sich u.a. von **W**(asser) und **E**(rdnüssen).
Die Effizienz seiner Vorbereitungsbemühungen gestaltet sich gemäß
folgender Funktion: $$f(W,E) = 2W^{0,6}\cdot E^{0,4}$$

Ein Wasser kostet 80 ct., ein Beutel Erdnüsse kostet 1,00 €.
Er möchte pro Tag nicht mehr als **t** € investieren.

a) Wie hoch muss **t** sein, damit er 4 Erdnusspakete konsumieren kann, um einen optimalen Grad an Klausurvorbereitung zu erreichen?

b) Wie viel Liter Wasser kann er dann unter Einhaltung des Budgets trinken?

Lösung:

$$f(W,E) = 2W^{0,6}\cdot E^{0,4}$$

$$L(W,E,\lambda) = 2W^{0,6}\cdot E^{0,4} + \lambda(t-0,8W-E)$$

$$\frac{\partial L}{\partial W}(W,E,\lambda) = 1,2\frac{E^{0,4}}{W^{0,4}} - 0,8\lambda \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2}\cdot\frac{E^{0,4}}{W^{0,4}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial E}(W,E,\lambda) = 0,8\frac{W^{0,6}}{E^{0,6}} - \lambda \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{5}\cdot\frac{W^{0,6}}{E^{0,6}}$$

$$\textit{Austauschverhältnis}:$$

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{E^{0,4}}{W^{0,4}} = \frac{4}{5}\cdot\frac{W^{0,6}}{E^{0,6}} \Rightarrow W = \frac{15}{8}E$$

$$\textit{eingesetzt in NB}:$$

$$t = 0,8W+E \xrightarrow{W = \frac{15}{8}E} t = \frac{4}{5}\cdot\frac{15}{8}E+E$$

$$\Rightarrow t = \frac{5}{2}E \xrightarrow{E=4} t=10 \Rightarrow W = \frac{15}{8}\cdot 4 = 7,5$$

5.) **Ökonomische Anwendungen zu Matrizen**

Gegeben seien die Matrizen $M_{RZ} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ und $M_{ZE} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$.

Die Produktionskosten seien gegeben durch: $\vec{k}_R = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\vec{k}_Z = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{k}_E = \begin{pmatrix} 15 \\ 18 \end{pmatrix}$

a) Wie viele Rohstoffe werden für je eine Mengeneinheit der Endprodukte benötigt?

Lösung:

$$M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 46 \\ 27 & 48 \end{pmatrix}$$

b) Wie viele Rohstoffe müssen für einen Auftrag von 15 E_1 und 20 E_2 im Lager vorrätig sein?

Lösung:

$$M_{RE} \cdot \vec{e} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 19 & 46 \\ 27 & 48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.205 \\ 1.365 \end{pmatrix}$$

c) Nun hat man einen Lagerbestand an Rohstoffen von $R_1 = 336$ und von $R_2 = 408$.
Wie viele Endprodukte E_1 und E_2 können hiermit hergestellt werden, wenn das Lager danach komplett leer sein sollte?

Lösung:

$$\text{Ansatz}: \quad M_{RE} \cdot \vec{x} = \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 19 & 46 \\ 27 & 48 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 336 \\ 408 \end{pmatrix}$$

Lösung per Cramer-Regel:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 336 & 46 \\ 408 & 48 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 19 & 46 \\ 27 & 48 \end{vmatrix}} = \frac{-2.640}{-330} = 8 \quad \wedge \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 19 & 336 \\ 27 & 408 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 19 & 46 \\ 27 & 48 \end{vmatrix}} = \frac{-1.320}{-330} = 4$$

d) Berechnen Sie die variablen Gesamtkosten je Endprodukt.

Lösung:

$$\text{Ansatz}: \quad \vec{k_R} \cdot M_{RE} + \vec{k_Z} \cdot M_{ZE} \cdot \vec{k_E} = \vec{k_{\text{var}}}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 19 & 46 \\ 27 & 48 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 255 & 474 \end{pmatrix}$$

6.) **Ökonomische Anwendungen zur Integralrechnung**

Gegeben seien die Nachfragefunktion $p_N(x) = -0{,}1x^2 + 9$

und die Angebotsfunktion $p_A(x) = 0{,}4x^2 + 3x + 1$

Berechnen Sie die Konsumentenrente.

Lösung:

$$\textit{Marktgleichgewicht}: \quad p_N(x) = p_A(x)$$

$$-0{,}1x^2 + 9 = 0{,}4x^2 + 3x + 1 \xrightarrow{+0{,}1x^2 - 9} 0{,}5x^2 + 3x - 8$$

$$\Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{1} = -3 \pm 5 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -8 \quad \wedge \quad x_2 = 2$$

$$p_N(2) = -0{,}1 \cdot 4 + 9 = 8{,}6 \quad \Rightarrow \quad M(2 \mid 8{,}6)$$

Konsumentenrente:

$$K_R = \int_0^2 \left(-0{,}1x^2 + 9\right) dx - 2 \cdot 8{,}6 = \left[-\frac{1}{30}x^3 + 9x\right]_0^2 - 17{,}2 = \frac{8}{15} = 0{,}533$$