Klausur: **Statistik**

Jürgen Meisel

Zugelassene Hilfsmittel: nicht progr. Taschenrechner
Bearbeitungszeit: **60 Minuten**

1.) Mittelwerte und Streumaße

17

Eine Befragung unter 100 Studenten bezüglich ihres täglichen Arbeitsaufwandes (in Stunden) zur Nach- bzw. Vorbereitung der Vorlesungen ergab folgendes Ergebnis:

Anzahl	**9**	**14**	**26**	**28**	**21**	**???**
Arbeitszeit	0,5 h	1 h	1,5 h	2 h	2,5 h	3 h

a) Ermitteln Sie das arithmetische Mittel.

Lösung: $\mu = 1,72\ h$

b) Berechnen Sie die Varianz und die Standardabweichung.

Lösung: $\sigma^2 = \frac{1}{100} \cdot 336 - 1,72^2 = 0,4016 \rightarrow \sigma = 0,634$

c) Wie groß ist der Median?

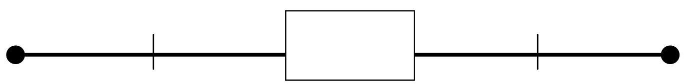
Lösung: $\overline{x_M} = \frac{1}{2}(x_{50} + x_{51}) \rightarrow \overline{x_M} = 2$

d) Ermitteln Sie das 1. und 3. Quartil.

Lösung:

$q_1 = \frac{1}{2}(x_{25} + x_{26}) \rightarrow q_1 = 1,5 \quad und \quad q_3 = \frac{1}{2}(x_{75} + x_{76}) \rightarrow q_3 = 2$

e) Zeichnen Sie einen Boxplot.



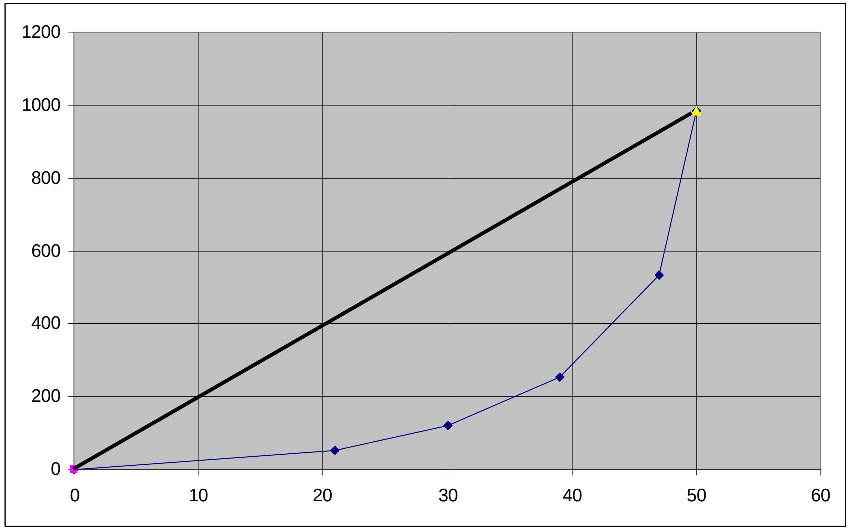
2.) Lorenzkurve und Ginikoeffizient

13

Man hat in einer Region bei 50 landwirtschaftlichen Betrieben die Nutzfläche beobachtet.
Bestimmen Sie die Lorenzkurve und den Gini-Koeffizient.

Fläche in ha [A]	**Anzahl [h_i]**	**H_i**	$A \cdot h_i$	$\sum_{i=1}^{5} A \cdot h_i$
0 - 5	**21**	**21**	**52,5**	**52,5**
5 - 10	**9**	**30**	**67,5**	**120,0**
10 - 20	**9**	**39**	**135,0**	**255,0**
20 - 50	**8**	**47**	**280,0**	**535,0**
50 - 250	**3**	**50**	**450,0**	**985,0**

Lösung:



Gini-Koeffizient:

Fläche unterhalb der Lorenzkurve: 8.455

$$GK = \frac{24.625 - 8.455}{24.625} = \frac{16.170}{24.625} = 0,6566$$

3.) Preisindizes

8

Knut Hund studiert seit 2008 an der Hochschule Knölingen.

Er muss mit seinen Eltern über eine Erhöhung der monatlichen Bezüge sprechen und will mit dem Verweis, dass auch für Studenten alles teurer geworden ist, einen größeren Scheck.
Zum Beweis seiner These verweist er auf die Preisentwicklung seines studentenspezifischen Warenkorbes:

	2008		2010		2012	
	Preis	Menge	Preis	Menge	Preis	Menge
Telefon-kosten	0,30	100 Einh.	0,30	150 Einh.	0,20	200 Einh.
Eintritt AStA-Feten	5,00	3 Feten	7,00	4 Feten	10,00	6 Feten
Miete	300,00	1 Wohnung	320,00	1 Wohnung	330,00	1 Wohnung

a) Berechnen Sie anhand dieses Warenkorbs den Preisindex der Lebenshaltung nach Laspeyres und die sich daraus ergebende Inflationsrate für das Jahr 2012.
Anmerkung: nehmen Sie 2008 als Basisjahr.

Lösung:

$$L_P = \frac{0,2\cdot 100 + 10\cdot 3 + 330\cdot 1}{0,3\cdot 100 + 5\cdot 3 + 300\cdot 1} = \frac{380}{345} = 1{,}1014$$

$$q = \sqrt[4]{1{,}1014} = 1{,}0244 = 2{,}44\,\%$$

b) Braucht er in der Tat mehr Geld?

Mit welchen Argumenten könnten die Eltern ihm – auch mit Verweis auf Seinen spezifischen Warenkorb – eine Erhöhung der monatlichen Bezüge verweigern?

Lösung: => Telefonkosten haben sich reduziert

=> Anzahl der Unifeten reduzieren

4.) Lineare Regression und Korrelation

12

Gegeben ist der Ausschnitt einer Statistik aus einer europäischen Großstadt, die das Alter von Bräutigam und Braut bei den Eheschließungen eines Jahres verzeichnet:

Alter des Bräutigams	Alter der Braut	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
22	19	**484**	**361**	**418**
25	22	**625**	**484**	**550**
26	21	**676**	**441**	**546**
26	23	**676**	**529**	**598**
27	23	**729**	**529**	**621**
28	24	**784**	**576**	**672**
30	29	**900**	**841**	**870**
30	27	**900**	**729**	**810**
35	33	**1225**	**1089**	**1155**
41	29	**1681**	**841**	**1189**
29,0	**25,0**	**8680**	**6420**	**7429**

a) Bestimmen Sie die Regressionsgerade (x = Alter des Bräutigams; y = Alter der Braut) durch eine Funktion $y = b_0 + b_1 x$ dar.

Lösung:

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= \frac{7.429 - 10\cdot 29\cdot 25}{8.680 - 10\cdot 29^2} = \frac{179}{270} = 0{,}663 \\ b_0 &= 25 - 0{,}663\cdot 29 = 5{,}774 \end{aligned}\right\} \quad y = 5{,}774 + 0{,}663x$$

b) Ermitteln Sie den Wert des Korrelationskoeffizienten.

Lösung: $$r = \frac{179}{\sqrt{270}\cdot\sqrt{170}} = 0{,}8355$$

Wählen Sie von den beiden Aufgaben 5 oder 6 nur eine zur Bearbeitung aus!

5.) Wahrscheinlichkeitsrechnung und Erwartungswert | 10 | |

Von 12 Zahlen sind fünf positiv und sieben negativ. **Zwei** Zahlen werden zufällig **ohne Zurücklegen** gezogen und multipliziert.

a) Ist es günstiger, auf ein positives oder ein negatives Produkt zu setzen?

Lösung:

$$P(\text{Produkt positiv}) = \frac{62}{132} \qquad P(\text{Produkt negativ}) = \frac{70}{132}$$

Daher ist es günstiger auf ein negative Produkt zu setzen.

Nun soll ein Glücksspiel durchgeführt werden:

Der Einsatz beträgt 5,00 €.
Es wird **zweimal** gezogen **mit Zurücklegen**.

Bei zwei positiven Zahlen erhält man 12,00 €;
bei zwei negativen Zahlen bekommt man 8,00 € und sonst nichts.

b) Ist das Spiel fair?

c) Wie hoch dürfte der Einsatz höchstens sein, damit das Spiel fair ist?

Lösung: $$E(X) = \frac{25}{144}\cdot 12 + \frac{49}{144}\cdot 8 = 4{,}81$$

Daher ist das Spiel für den Spieler unfair, da er auf lange Sicht nicht seinen Einsatz gewinnen kann.

Damit ein faires Spiel existiert, muss der Einsatz auf höchstens 4,81 € begrenzt sein.

6.) Satz von Bayes und totale Wahrscheinlichkeit | 10 | |

Unter den nach Arbeitern, Angestellten, Beamten und Selbstständigen gegliederten Berufstätigen einer Stadtbevölkerung verhalten sich die Anteile bei der gegebenen Reihenfolge wie 7 : 6 : 3 : 4.

Die Krankheitsquote unter den Berufstätigengruppen ist entsprechend der Reihenfolge wie folgt:

10 % - 6 % - 2 % - 5 %.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewählter Berufstätiger gesund?

Lösung:

$$P(gesund) = \frac{7}{20}\cdot 0{,}9 + \frac{6}{20}\cdot 0{,}94 + \frac{3}{20}\cdot 0{,}98 + \frac{4}{20}\cdot 0{,}95 = 0{,}934$$

$$P(krank) = 0{,}066$$

b) Ein Kranker wird beim Arzt behandelt.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es ein Arbeiter oder Angestellter?

Lösung: $$P_{krank}(Arb \cup Ang) = \frac{\frac{7}{20}\cdot 0{,}1 + \frac{6}{20}\cdot 0{,}06}{0{,}066} = 0{,}803$$