Klausur: **Statistik**

Meisel/Steiner

Zugelassene Hilfsmittel: nicht progr. Taschenrechner
Bearbeitungszeit: **60 Minuten**

Anmerkung zur Bearbeitung: Die Klausur besteht aus insgesamt 6 Aufgaben. <u>Sie müssen nur 4 davon bearbeiten.</u> Bitte wählen Sie 4 Aufgaben aus und streichen Sie die 2 nicht bearbeiteten Aufgaben bitte auf dem Aufgabenblatt.

Teilbereich Statistik

1.) Mittelwerte und Streumaße: Neukundengewinnung

Sie arbeiten in einer Abteilung für die Neukundengewinnung.
In aufeinanderfolgenden Wochen wurde folgende Anzahl von Neukunden hinzugewonnen:

7, 9, 14, 4, 15, 9, 8, 11, 14, 8, 10, 13

Berechnen Sie folgende Kennzahlen:

a) das arithmetische Mittel,
b) die Varianz und die Standardabweichung,
c) den Median,
d) das 0,25-Quantil und
e) das 0,75-Quantil.

Lösung:

			Quartil 1			Median			Quartil 3				
Position	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	**Summe**
Wert	4	7	8	8	9	9	10	11	13	14	14	15	122
Quadrat	16	49	64	64	81	81	100	121	169	196	196	225	1.362

MW	10,167
Varianz	10,139
Std.-AW	3,1842
Median	9,5
Q(0,25)	8
Q(0,75)	13,5

2.) Lorenz, Gini und Korrelation

Teil I:

In einer Firma ist die Einkommensverteilung wie folgt:

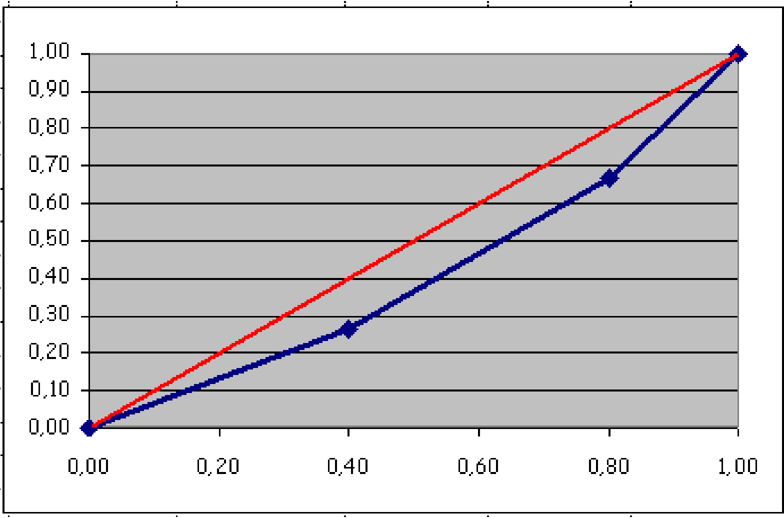
40% der Beschäftigten verdienen 2.000,00 € im Monat,
40% 3.000,00 € pro Monat und 20% 5.000,00 € pro Monat.

a) Zeichnen Sie dazu eine Lorenzkurve.

b) Berechnen Sie den Gini-Index bzw. Gini-Koeffizient.

Lösung:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Beschäftigte		Verdienst					
2	rel. H.	rel. H. (Summe)	absolut (einzel)	gew. absolut	rel. H.	rel. H. (Summe)		
3	0,4	0,4	2.000	800	0,27	0,27		
4	0,4	0,8	3.000	1.200	0,40	0,67		
5	0,2	1	5.000	1.000	0,33	1,00		
6				3.000	1			
7								
8	Lorenzkurve:	x-Wert	y-Wert	Trapezflächen				
9		0,00	0,00	0,05333333				
10		0,40	0,27		0,18666667			
11		0,80	0,67			0,166666667		
12		1,00	1,00					
13					Summe:	0,406666667		
14	Diagonale:	0	0		Konzentra-tionsfläche:	0,093333333	Gini-Koeffizient	0,18666667
15		1	1					
16							norm. Gini-Koeffizient	0,28
17								
18								
19								
20								
21								
22								
23								
24								
25								
26								
27								
28								
29								
30								
31								



Teil II:

Sie arbeiten in einem Schuhgeschäft und stellen für Winterstiefel folgende Verkaufszahlen fest in Monaten mit folgender Durchschnittstemperatur in Celsius:

monatliche Durchschnittstemperatur	**2**	**-4**	**4**	**-2**
Anzahl verkaufte Paar Winterstiefel	**5**	**17**	**1**	**13**

a) Berechnen Sie die Korrelation zwischen der monatlichen Durchschnittstemperatur und der Anzahl verkaufter Winterstiefel.

b) Wie ist Ihre Schätzung für die Anzahl verkaufter Paar Winterstiefel, wenn Sie nun wissen, dass in einem Monat die durchschnittliche Temperatur 1 Grad Celsius betrug?

Lösung:

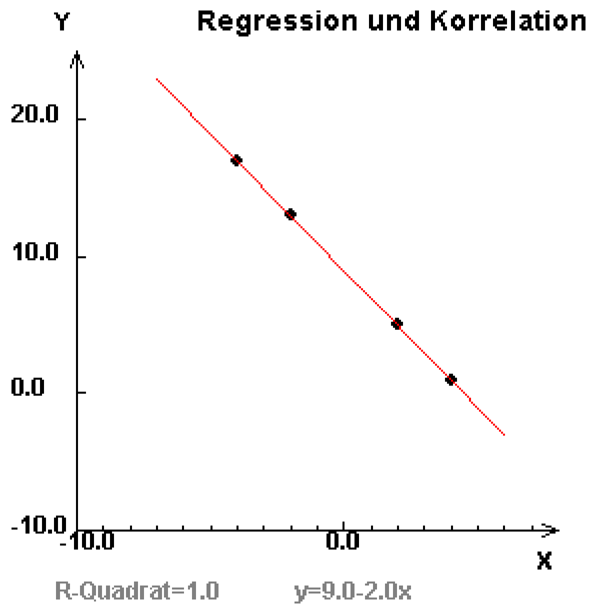
Mittelwerte: **x-Werte =** 0.0000 **y-Werte =** 9.0000

Standardabweichung: **x-Werte =** 3.6515 **y-Werte =** 7.3030

Gleichungen der Regressionsgeraden: y = b1*x + b0 bzw. x = a1*y + a0

b1 = -2.0000 **b0 =** 9.0000 **a1 =** -0.5000 **a0 =** 4.5000

Korrelationskoeffizient r = -1.000000 Neustart Grafik



$$f(x) = -2x+9 \rightarrow f(1) = -2\cdot 1+9 = 7$$

3.) Spearmanscher Rangkorrelationskoeffizient und Preisindex

Teil I:

Paul hat beim Eiskunstlaufwettbewerb folgende Bewertungen erhalten:

Punktrichter	1	2	3	4	5	6
A-Note	5,7	5,2	5,3	4,8	5,0	5,1
B-Note	5,0	5,5	5,3	5,9	5,8	5,7

Berechnen Sie den Spearmanschen Rangkorrelationskoeffizienten.

Lösung:

Punktrichter	A-Note	B-Note	d_i	d_i^2
1	1	6	5	25
2	3	4	1	1
3	2	5	3	9
4	6	1	5	25
5	5	2	3	9
6	4	3	1	1
				70

$$r_S = 1 - \frac{6 \cdot 70}{6 \cdot 35} = -1$$

Teil II:

Familie Winzig leistet sich leistet sich folgende Produkte und Ausgaben.
Für die einzelnen Jahre wurde aus dem Haushaltsbuch folgende Übersicht erstellt:

	Preis 2006	Umsatz 2006	Preis 2010	Verbrauch 2010
Flips	1,00 € / Tüte	40,00 €	2,50 € / Tüte	60 Tüten
Schokoeier	4,00 € / kg	36,00 €	6,00 € / kg	10 kg
Apfelsaft	1,50 € / ltr.	300,00 €	1,20 € / ltr.	250 ltr.

a) Berechnen Sie den Preisindex nach Laspeyres für 2010 zur Basis 2006.

b) Wie groß ist der durchschnittliche jährliche Preisanstieg in %?

c) Berechnen Sie den Preisindex nach Paasche für 2010 zur Basis 2006.

Lösung:

$$L_P = \frac{2,5\cdot 40+6\cdot 9+1,2\cdot 200}{40+36+300} = 1,04787$$

$$g = \sqrt[4]{1,04787} = 1,011759 \rightarrow 1,176\,[\%]$$

$$P_P = \frac{2,5\cdot 60+6\cdot 10+1,2\cdot 250}{1\cdot 60+4\cdot 10+1,5\cdot 250} = \frac{510}{475} = 1,07368$$

Teilbereich Stochastik

1.) Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und Testverfahren

Teil I:

Eine stetige Zufallsvariable X hat die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & wenn\ \ x<0 \\ a\cdot(1+x) & wenn\ \ 0\le x\le 2 \\ 0 & wenn\ \ x>2 \end{cases}$$

wobei a eine Konstante ist.

a) Bestimmen Sie den Wert von a, damit dies tatsächlich eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist.

Lösung:

$$Ansatz:\ \int_0^2 f(x)\,dx = 1$$

$$\rightarrow \int_0^2 f(x)\,dx = a\cdot\int_0^2(1+x)\,dx = a\cdot\left[x+\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 = 4a$$

$$\rightarrow 4a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{4}$$

b) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

Lösung:

$$Ansatz:\ \mu = E(X) = \int_0^2 x\cdot f(x)\,dx$$

$$\rightarrow E(X) = a\cdot\int_0^2 x\cdot(1+x)\,dx = a\cdot\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{14}{3}a \xrightarrow{a=\frac{1}{4}} \frac{7}{6}$$

c) Berechnen Sie die Varianz von X.

Lösung:

$$\text{Ansatz}: \quad V(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2)-\mu^2$$

$$\rightarrow \quad E(X^2) = a\cdot\int_0^2 x^2\cdot f(x)\,dx = a\cdot\int_0^2 x^2\cdot(1+x)\,dx$$

$$= a\cdot\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = \frac{20}{3}a \xrightarrow{a=\frac{1}{4}} \frac{5}{3}$$

$$\rightarrow \quad V(X) = E(X^2)-\mu^2 = \frac{5}{3}-\left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{11}{36}$$

Teil II:

In einer Gegend haben durchschnittlich von 1000 Personen eine Person Hepatitis B. Der Hepatitistest gibt zu 99% eine richtige Antwort bei kranken Personen und zu 98% eine richtige Antwort bei gesunden Personen.
Eine Person wird auf Hepatitis getestet und der Test besagt 'krank'.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person tatsächlich Hepatitis hat?

Lösung:

Ereignisse: H : Patient hat Hepatitis $\overline{H}$: Patient hat kein Hepatitis

P : Test fällt positiv aus $\overline{P}$: Test fällt negativ aus

Gegeben:

$$W(P\mid H) = 0{,}99 \qquad W(\overline{P}\mid H) = 0{,}01$$

$$W(P\mid \overline{H}) = 0{,}02 \qquad W(\overline{P}\mid \overline{H}) = 0{,}98$$

$$W(H) = 0{,}001 \qquad W(\overline{H}) = 0{,}999$$

$$W(P) = W(H)\cdot W(P\mid H)+W(\overline{H})\cdot W(P\mid \overline{H}) = 0{,}02097$$

$$\text{Gesucht}:$$

$$W(H\mid P) = \frac{W(H\cap P)}{W(P)} = \frac{W(H)\cdot W(P\mid H)}{W(P)}$$

$$W(H\mid P) = 0{,}0472103$$

2.) Binomialverteilung und Erwartungswert

Teil I:

Der Eisverkäufer Claudio Gelatino hat auf der Zugspitze ein Eiscafé eröffnet. Bei schönem Wetter erzielt er einen Tagesgewinn von 300,00 € und bei Regen von 30,00 €. Bei Schneefall macht er 220,00 € Verlust.
Die Wahrscheinlichkeit für schönes Wetter sei P(S) = 0,25 und für Regen P(R) = 0,4.

Wie hoch ist der Erwartungswert des täglichen Gewinns für den Eisverkäufer?

Lösung:

$$E(X = x_i) = \sum_{i=1}^{3} \left[P(X = x_i) \cdot x_i \right]$$

$$E(X = x_i) = 0,25 \cdot 300 + 0,4 \cdot 30 + 0,35 \cdot (-220) = 10$$

Teil II:

Claudio entschließt sich sein Eiscafé genau 100 Tage pro Jahr zu öffnen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, wenn p = 0,25 (für Sonnentag) gilt, dass es während der Öffnungszeit

a) genau 40 Sonnentage gibt?
b) mehr als 20 Sonnentage gibt?
c) zwischen 15 und 30 Sonnentage gibt?

Lösung:

$$B(X = 40) = \binom{100}{40}\left(\frac{1}{4}\right)^{40}\left(\frac{3}{4}\right)^{60} = 0{,}000363$$

$$B(X > 20) = 1 - B(X \le 20) = 1 - 0{,}1488 = 0{,}8512$$

$$B(15 \le X \le 30) = B(X \le 30) - B(X \le 14) = 0{,}8962 - 0{,}0054 = 0{,}8908$$

3.) Normalverteilung und Satz von Bayes

Teil I:

Die Unternehmung Matzen & Timm GmbH beliefert seit mehr als 30 Jahren die internationale Luft- und Raumfahrtindustrie, aber auch die Automobil- und Schienenfahrzeugbranche mit hochspezialisierten Schläuchen und Formteilen. Für den Airbus A380 liefert das Unternehmen unter anderem isolierte Leichtgewichtsschläuche und Faltenbälge. Diese leichten, flexiblen Schläuche sorgen für eine gleichmäßige Luftverteilung in der A380-Klimaanlage.
Die Herstellung erfolgt auf 3 Produktionsanlangen mit folgender Aufteilung:

Anlage 1: 40 % Anlage 2: 25 % Anlage 3: 35 %

Die Fehlerquote bei Produkttests auf den einzelnen Anlagen war wie folgt:

Anlage 1: 2 % Anlage 2: 5 % Anlage 3: 1,5 %

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer Produktkontrolle einen fehlerfreien Schlauch zu erhalten?

b) Bei einer Materialkontrolle werden Fehler bei einem Schlauch festgestellt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt er von Anlage 2?

Lösung:

$$P(\text{"}fehlerfrei\text{"}) = 0,4\cdot 0,98 + 0,25\cdot 0,95 + 0,35\cdot 0,985 = 0,97425 \approx 97,4\,[\%]$$

$$P(\text{"}fehlerhaft\text{"}) = 1 - 0,97425 = 0,02575$$

=> Satz von Bayes

$$P_{(\text{"}fehlerhaft\text{"})}(\text{"}Anlage\ 2\text{"}) = \frac{P(f \cap A2)}{P(f)}$$

$$P_{(\text{"}fehlerhaft\text{"})}(\text{"}Anlage\ 2\text{"}) = \frac{0,25\cdot 0,05}{0,02575} \approx 0,4854 = 48,54\,[\%]$$

Teil II:

Singapore Airlines bietet Linienflüge mit einem Airbus A380 (500 Sitzplätze) an. Erfahrungsgemäß erscheinen nur 95 % der Passagiere, die einen Platz gebucht haben, auch tatsächlich zum Abflug.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem ausgebuchten Flug höchstens 480 Plätze belegt werden?

Aus Sparsamkeitsgründen ist die Fluggesellschaft dazu übergegangen, die Flüge überbuchen zu lassen.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer 10%igen Überbuchung (d.h. 550 Plätze verkauft) nicht alle erscheinenden Fluggäste transportiert werden können (d.h. dass mindestens 501 Passagiere kommen)?

Lösung:

$$P(X \leq 480) \;=\; \Phi(1{,}03) \;=\; 0{,}84849$$

$$Umrechnung: \quad x \;=\; \frac{480-475}{\sqrt{23{,}75}} \;=\; 1{,}03$$

$$P(X \geq 501) \;=\; 1-P(X \leq 500) \;=\; 1-\Phi(-4{,}40) \;=\; \Phi(4{,}40) \;\approx\; 1$$

$$Umrechnung: \quad x \;=\; \frac{500-522{,}5}{\sqrt{26{,}125}} \;=\; -4{,}40$$

=> Mit nahezu 100 % Wahrscheinlichkeit können nicht alle Passagiere befördert werden, so dass der Überbuchungsprozentsatz viel zu hoch ist!