Klausur: Wirtschaftsstatistik

(Lehrveranstaltung)

DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Mannheim

Fakultät für Wirtschaft

Studiengang: **Öffentliche Wirtschaft**

Datum: 25.06.2018

Matrikelnummer:	....			**Dozent:** **Jürgen Meisel**	
Kurs:	**WOW17A**	**Semester:**	**2**		
Hilfsmittel:				**Bearbeitungszeit:** **60 Minuten**	
Bewertung:	Maximale Punktzahl:	**100**		Erreichte Punktzahl:	
Punkte:	....			Signum:	
Anmerkungen:	**Formelsammlung in der Klausur enthalten**				

Nummer (Aufgabe)	Thema	maximale Punkte	erreichte Punkte	Bemerkungen
1	Mittelwerte und Streumaße diskreter Merkmale	17		
2	Mittelwerte und Streumaße klassierter Merkmale	23		
3	Ginikoeffizient und Lorenzkurve	20		
4	Rechentechnik	10		
5	Regression und Korrelation	15		
6	Preisindizes	15		
Summe		100		

Klausur: Statistik
25.06.2018

Jürgen Meisel

Hilfsmittel: Nicht progr. Taschenrechner
Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Aufgabe 1

Ein Kioskbesitzer notiert 200 Tage lang die Zahl der verkauften Exemplare einer seiner Tageszeitungen.

Verkaufte Zeitungen	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Anzahl der Tage	**21**	**46**	**54**	**40**	**24**	**10**	**5**

a) Bestimmen Sie den Median, die beiden Quartile und erstellen Sie einen Boxplot.

b) Zeichnen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion.

c) Ermitteln Sie nun noch den arithmetischen Mittelwert und die Standardabweichung.

d) Wo liegt der Modalwert?

__**Lösung:**__

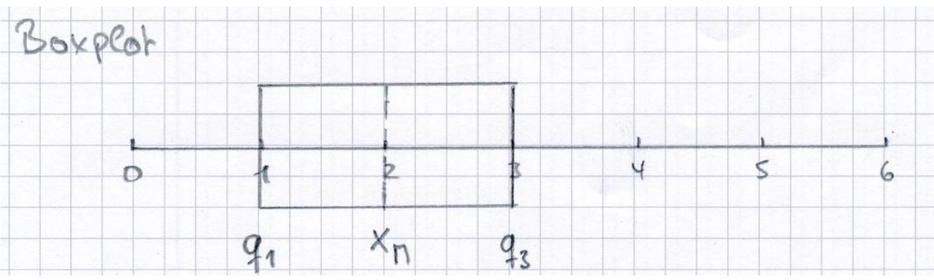
a) Median (Zentralwert) und Quantile/Quartile:

$$\overline{x_M} = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right) \rightarrow \overline{x_M} = \frac{1}{2}\left(x_{100} + x_{101}\right) = \frac{1}{2}(2+2) = 2$$

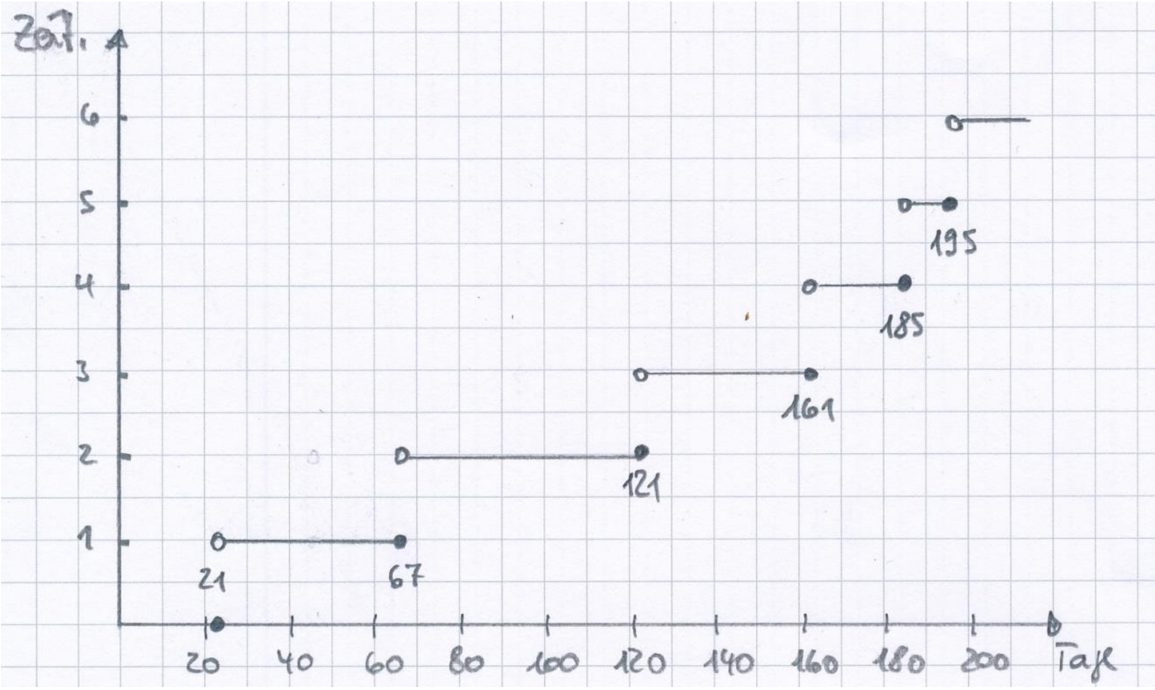
$$\overline{x_p} = \frac{1}{2}\left(x_{n\cdot p} + x_{n\cdot p+1}\right)$$

$$\overline{x_{0,25}} = \frac{1}{2}\left(x_{200\cdot 0,25} + x_{200\cdot 0,25+1}\right) = \frac{1}{2}\left(x_{50} + x_{51}\right) = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

$$\overline{x_{0,75}} = \frac{1}{2}\left(x_{200\cdot 0,75} + x_{200\cdot 0,75+1}\right) = \frac{1}{2}\left(x_{150} + x_{151}\right) = \frac{1}{2}(3+3) = 3$$



b) abschnittsweise definierte Treppenfunktion



Anmerkung:

Die Anzahl der Tage muss für jede Stufe als Teilsumme ermittelt werden.

c) Arithmetisches Mittel und Standardabweichung

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{200}\cdot 450 = 2,25$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - \mu^2} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{200}\cdot 1.436 - 2,25^2} = 1,455$$

d) Modalwert: häufigster Wert => x = 2

Aufgabe 2:

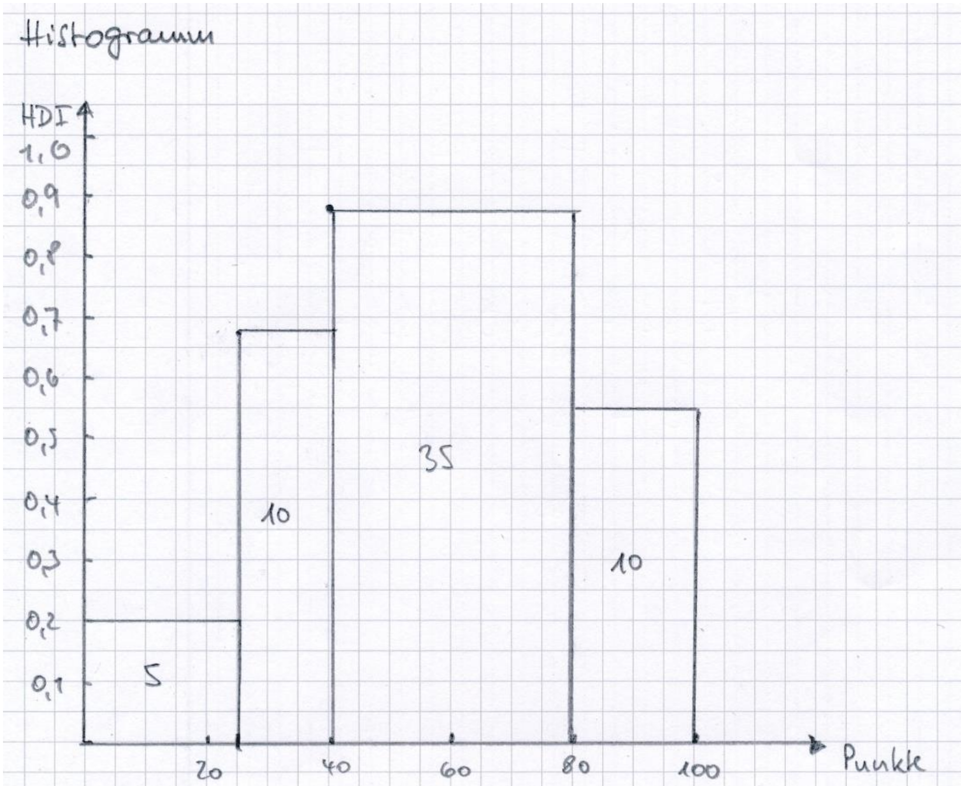
Bei der letzten Statistikklausur wurden folgende Ergebnisse festgestellt:

Punkte:	$0 \leq x < 25$	$25 \leq x < 40$	$40 \leq x < 80$	$80 \leq x \leq 100$
Anzahl Studenten	**5**	**10**	**35**	**10**

a) Zeichnen Sie das zugehörige Histogramm
b) Bestimmen Sie den Modus.
c) Wie hoch ist die Durchschnittspunktzahl und wie groß ist die Standardabweichung?
d) Wie hoch sind der Median und die beiden Quartile?

Lösung:

Punkte:	$0 \le x < 25$	$25 \le x < 40$	$40 \le x < 80$	$80 \le x \le 100$	**Summe**
Anzahl Studenten	**5**	**10**	**35**	**10**	**60**
Relative Häufigkeit	$\frac{1}{12} = 0,083$	$\frac{2}{12} = 0,167$	$\frac{7}{12} = 0,583$	$\frac{2}{12} = 0,167$	**1**
Summierte rel. H	**0,083**	**0,25**	**0,833**	**1**	**---**
Klassenbreite	**25**	**15**	**40**	**20**	**100**
HDI	**0,2**	**0,67**	**0,875**	**0,5**	**---**
Klassenmitte	**12,5**	**32,5**	**60**	**90**	**---**



b) **Modus:** Modale Klasse (größte HDI): => [40;80[

=> Modus (Klassenmitte): 60

c) **Arithmetisches Mittel und Standardabweichung**

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow \mu = 56,458 \qquad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - \mu^2} \Rightarrow \sigma = 21,249$$

Anmerkung: Verwendung der Klassenmitten.

d) **Median und Quartile**

Ansätze:

Median (bei intervallskaliertem Merkmal): $\overline{X}_{0,5} \in [a;b]$, $\overline{X}_{0,5} = a + \frac{\Delta_i \cdot (0{,}5 - F(a))}{p_i}$

unteres Quartil (bei intervallskaliertem Merkmal): $\overline{X}_{0,25} \in [a;b]$, $\overline{X}_{0,25} = a + \frac{\Delta_i \cdot (0{,}25 - F(a))}{p_i}$

oberes Quartil (bei intervallskaliertem Merkmal): $\overline{X}_{0,75} \in [a;b]$, $\overline{X}_{0,75} = a + \frac{\Delta_i \cdot (0{,}75 - F(a))}{p_i}$

$$\overline{x_M} = a + \frac{\Delta_i \cdot (0{,}5 - F(a))}{p_i} \rightarrow \overline{x_M} = 40 + \frac{40 \cdot (0{,}5 - 0{,}25)}{0{,}5833} = 57{,}1438$$

$$\overline{x_{0,25}} = a + \frac{\Delta_i \cdot (0{,}25 - F(a))}{p_i} \rightarrow \overline{x_{0,25}} = 25 + \frac{15 \cdot (0{,}25 - 0{,}083)}{0{,}167} = 40$$

$$\overline{x_{0,75}} = a + \frac{\Delta_i \cdot (0{,}75 - F(a))}{p_i} \rightarrow \overline{x_{0,75}} = 40 + \frac{40 \cdot (0{,}75 - 0{,}25)}{0{,}5833} = 74{,}2876$$

Aufgabe 3:

In der Lokalpresse stand folgendes zu lesen:

Und nach wie vor gilt, dass die oberen 10 % der Einkommensbezieher etwa die Hälfte der Einkommensteuer bezahlen, während die untere Hälfte der Einkommensbezieher lediglich 10 % der der Einkommensteuer bestreitet.

a) Erstellen Sie eine Tabelle mit den insgesamt drei Gruppen an Einkommensbeziehern und deren geleistete Einkommensteuer.

b) Zeichnen Sie die zugehörige Lorenzkurve.

c) Berechnen Sie den Ginikoeffizient.

Lösung:

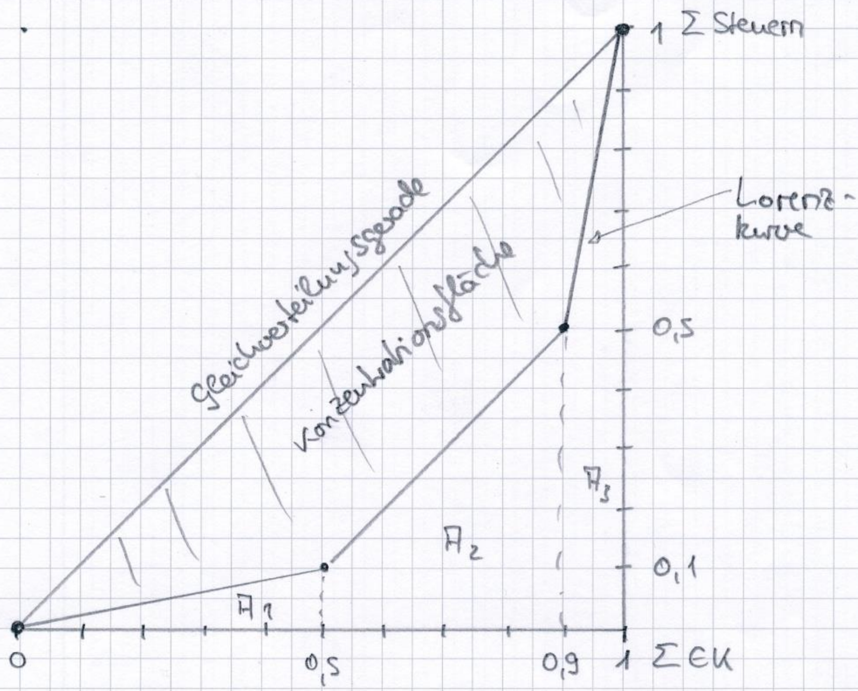
Gruppe	Einkommen	Summe EK	Steuer	Summe Steuer
1	0,5	0,5	0,1	0,1
2	0,4	0,9	0,4	0,5
3	0,1	1,0	0,5	1,0
Summe	1	---	1	---

Gini-Koeffizient: *Berechung der Flächen mit relativen kumulierten Häufigkeiten*

$$Gini = \frac{\text{Konzentrationsfläche K}}{\text{maximale Konzentrationsfläche } K_{max}}$$

Anmerkung: Als *„Konzentrationsfläche" K* bezeichnet man die Fläche, zwischen der Gleichverteilungsdiagonalen und der LORENZ-Kurve: $0 \leq K \leq 1/2$.

Der Wertebereich des Gini-Koeffizienten liegt zwischen 0 (= Gleichverteilung) und 1 (= vollständige Konzentration auf einen Merkmalsträger).



Flächen: Max Konzentration: $A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$

Konzentrationsfläche K

① Fläche unter Lorenzkurve

$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 0,1 = 0,025$

$A_2 = \frac{1}{2} (0,1 + 0,5) \cdot 0,4 = 0,12$

$A_3 = \frac{1}{2} (0,5 + 1,0) \cdot 0,1 = 0,075$

$\Sigma\ 0,22$

② $K = 0,5 - 0,22 = 0,28$

$$GK = \frac{0,28}{0,5} = 0,56$$

Aufgabe 4:

Gegeben sind folgende Größen:

$$\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right) \quad = \quad 1053 \qquad und \qquad \overline{x}=32 \quad und \quad \overline{y}=32$$

Berechnen Sie aus diesen Daten das Ergebnis von: $\sum_{i=1}^{5}(x_i y_i)$.

<u>**Lösung:**</u>

$$\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right) \quad = \quad 1053 \qquad und \qquad \overline{x}=32 \quad und \quad \overline{y}=32$$

$$\xrightarrow{\text{ausmultiplizieren}} \sum_{i=1}^{5}\left(x_i\cdot y_i - x_i\cdot\overline{y}-\overline{x}\cdot y_i+\overline{x}\cdot\overline{y}\right) \quad = \quad 1.053$$

$$\xrightarrow[\text{der Summe}]{\text{zerlegen}} \sum_{i=1}^{5}\left(x_i\cdot y_i\right)-\sum_{i=1}^{5}\left(x_i\cdot\overline{y}\right)-\sum_{i=1}^{5}\left(\overline{x}\cdot y_i\right)+\sum_{i=1}^{5}\left(\overline{x}\cdot\overline{y}\right) \quad = \quad 1.053$$

$$\xrightarrow{\text{Summeoperationen}} \sum_{i=1}^{5}\left(x_i\cdot y_i\right)-\overline{y}\cdot\sum_{i=1}^{5}x_i-\overline{x}\cdot\sum_{i=1}^{5}y_i+\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\sum_{i=1}^{5}1 \quad = \quad 1.053$$

$$Zwischenschritte:$$

$$\sum_{i=1}^{5}x_i = x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 5\cdot\overline{x}$$

$$\sum_{i=1}^{5}y_i = y_1+y_2+y_3+y_4+y_5 = 5\cdot\overline{y}$$

$$\sum_{i=1}^{5}1 = 1+1+1+1+1 = 5\cdot 1 = 5$$

$$\xrightarrow{\text{umgeformt}} \sum_{i=1}^{5}\left(x_i\cdot y_i\right)-\overline{y}\cdot 5\cdot\overline{x}-\overline{x}\cdot 5\cdot\overline{y}+\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot 5 \quad = \quad 1.053$$

$$\xrightarrow{\text{umgeformt}} \sum_{i=1}^{5}\left(x_i\cdot y_i\right)-5\cdot\overline{x}\cdot\overline{y}-5\cdot\overline{x}\cdot\overline{y}+5\cdot\overline{x}\cdot\overline{y} \quad = \quad 1.053$$

$$\xrightarrow{\text{zusammengefasst}} \sum_{i=1}^{5}\left(x_i\cdot y_i\right)-5\cdot\overline{x}\cdot\overline{y} \quad = \quad 1.053$$

$$\xrightarrow{\text{eingesetzt}} \sum_{i=1}^{5}\left(x_i\cdot y_i\right)-5\cdot 32\cdot 32 \quad = \quad 1.053$$

$$\xrightarrow{\text{Ergebnis}} \sum_{i=1}^{5}\left(x_i\cdot y_i\right) \quad = \quad 6.173$$

Aufgabe 5:

Der bekannte Psychologe A. Skinner hat den IQ von sieben eineiigen Zwillingen gemessen. Die nachfolgende Tabelle zeigt die Daten an:

X	98	100	104	104	102	102	104
Y	94	94	103	105	99	102	103

Zwilling X wuchs im Elternhaus auf, Zwilling Y wurde bei Pflegeeltern groß gezogen.

a) Berechnen Sie die lineare Regression und den Pearsonschen Korrelationskoeffizient.

b) Interpretieren Sie kurz Ihre Ergebnisse.

Lösung:

a)

$$\text{Regressionsgerade:} \quad y = A + B \cdot x \quad \rightarrow \quad y = -84{,}875 + 1{,}8125 \cdot x$$

$$\text{Korrelationskoeffizient:} \quad r = 0{,}936$$

b) Bei den Zwillingspaaren herrscht eine enge Korrelation zwischen den IQ-Werten; allerdings ist hier nur eine geringe Datenbasis vorhanden.

Aufgabe 6:

Es werde ein Warenkorb mit vier Gütern herangezogen. Mengen und Preise sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

	Jahr 2010		Jahr 2016	
Gut Nr.	Menge	Preis/ME	Menge	Preis/ME
1	10	40	10	60
2	10	30	8	45
3	5	20	25	30
4	25	80	5	120

a) Berechnen Sie den Preisindex nach Laspeyres für 2016 zur Basis 2010 und die jährliche Preissteigerung.

b) Berechnen Sie den Preisindex nach Paasche für 2016 zur Basis 2010.

c) Ermitteln Sie die jährliche Preissteigerung auf der Basis von Laspeyeres.

Lösung:

a) nach Laspeyres: $$L_P = \frac{\sum p_{1i} \cdot q_{0i}}{\sum p_{0i} \cdot q_{0i}} = \sum \frac{p_{1i}}{p_{0i}} \cdot \frac{p_{0i} \cdot q_{0i}}{\sum p_{0i} \cdot q_{0i}} \quad mit\ i \in N$$

$$L_P = \frac{10 \cdot 60 + 10 \cdot 45 + 5 \cdot 30 + 25 \cdot 120}{10 \cdot 40 + 10 \cdot 30 + 5 \cdot 20 + 25 \cdot 80} = \frac{4.200}{2.800} = 1,5$$

b) nach Paasche: $$P_P = \frac{\sum p_{1i} \cdot q_{1i}}{\sum p_{0i} \cdot q_{1i}} = \sum \frac{p_{1i}}{p_{0i}} \cdot \frac{p_{0i} \cdot q_{1i}}{\sum p_{0i} \cdot q_{1i}} \quad mit\ i \in N$$

$$P_P = \frac{10 \cdot 60 + 8 \cdot 45 + 25 \cdot 30 + 5 \cdot 120}{10 \cdot 40 + 8 \cdot 30 + 25 \cdot 20 + 5 \cdot 80} = \frac{2.310}{1.540} = 1,5$$

c) $$q = \sqrt[6]{1,5} = 1,0699 \xrightarrow[\cdot 100]{-1} p = 6,99\,\%$$