

Übungen zur Rechentechnik

Aufgabe 6: Rechentechnik bei Mittelwerten und Streumaßen I

Bei einer Stichprobe vom Umfang $n = 10$ wurden das arithmetische Mittel $\mu = 8$ und die Standardabweichung mit $\sigma = 4$ berechnet.

Leider wurden die Werte $x_{11} = 1$ und $x_{12} = 3$ bei der Berechnung vergessen. Wie lauten nun Mittelwert und Standardabweichung für die gesamte Stichprobe mit $n = 12$?

Anmerkung: Verwenden Sie u.a. die Formel $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i)^2 - \mu^2$

Lösung:

Handwritten solution on grid paper:

Given: $\mu = 8$, $n = 10$, $\sigma = 4$

new MW:

$$\mu_{\text{neu}} = \frac{1}{12} (80 + 1 + 3)$$
$$\mu_{\text{neu}} = \frac{84}{12} = 7$$

new Varianz:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum x_i^2 - \mu^2$$
$$\frac{1}{10} \sum x_i^2 - 64 = 16$$
$$\sum x_i^2 = 800$$
$$\sigma_{\text{neu}}^2 = \frac{1}{12} (800 + 1 + 9) - 49$$
$$\sigma_{\text{neu}}^2 = \frac{810}{12} - 49$$
$$\sigma_{\text{neu}}^2 = 18,5$$
$$\sigma_{\text{neu}} = 4,30116$$

Aufgabe 7: Rechentechnik bei Mittelwerten und Streumaßen II

Gegeben sind folgende Größen:

$$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 2000 \quad \text{und} \quad \bar{x} = 20 \quad \text{und} \quad \bar{y} = 15$$

Berechnen Sie aus diesen Daten das Ergebnis von: $\sum_{i=1}^{10} (x_i y_i)$.

$$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 2.000$$

$$\xrightarrow{\text{ausmultiplizieren}} \sum_{i=1}^{10} (x_i \cdot y_i - x_i \cdot \bar{y} - \bar{x} \cdot y_i + \bar{x} \cdot \bar{y}) = 2.000$$

$$\xrightarrow{\text{zerlegen der Summe}} \sum_{i=1}^{10} (x_i \cdot y_i) - \sum_{i=1}^{10} (x_i \cdot \bar{y}) - \sum_{i=1}^{10} (\bar{x} \cdot y_i) + \sum_{i=1}^{10} (\bar{x} \cdot \bar{y}) = 2.000$$

$$\xrightarrow{\text{Summeoperationen}} \sum_{i=1}^{10} (x_i \cdot y_i) - \bar{y} \cdot \sum_{i=1}^{10} x_i - \bar{x} \cdot \sum_{i=1}^{10} y_i + \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \sum_{i=1}^{10} 1 = 2.000$$

Zwischenschritte:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{10} = 10 \cdot \bar{x}$$

$$\sum_{i=1}^{10} y_i = y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{10} = 10 \cdot \bar{y}$$

$$\sum_{i=1}^{10} 1 = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = 10 \cdot 1 = 10$$

$$\xrightarrow{\text{umgeformt}} \sum_{i=1}^{10} (x_i \cdot y_i) - \bar{y} \cdot 10 \cdot \bar{x} - \bar{x} \cdot 10 \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot 10 = 2.000$$

$$\xrightarrow{\text{umgeformt}} \sum_{i=1}^{10} (x_i \cdot y_i) - 10 \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} - 10 \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} + 10 \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} = 2.000$$

$$\xrightarrow{\text{zusammengefasst}} \sum_{i=1}^{10} (x_i \cdot y_i) - 10 \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} = 2.000$$

$$\xrightarrow{\text{eingesetzt}} \sum_{i=1}^{10} (x_i \cdot y_i) - 10 \cdot 20 \cdot 15 = 2.000$$

$$\xrightarrow{\text{Ergebnis}} \sum_{i=1}^{10} (x_i \cdot y_i) = 5.000$$