Klausur Wirtschaftsstatistik

Fakultät für Wirtschaft

DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Mannheim

Studiengang: Öffentliche Wirtschaft Datum: 24.06.2019

Matrikelnummer:			**Dozent: Jürgen Meisel**	
Kurs: WOW 18A	**Semester:**	2		
Hilfsmittel:			**Bearbeitungszeit: 60 min.**	
Bewertung:	Maximale Punktzahl: 100		Erreichte Punktzahl:	
Prozente:	....		Signum:	
Anmerkungen:	***Bitte bearbeiten Sie nur 4 der 5 Aufgaben!*** ***Streichen Sie die nicht bearbeitete Aufgabe durch oder falls Sie alle 5 Aufgaben bearbeitet haben, bitte ich Sie diejenige zu streichen, die nicht in die Wertung kommen soll!***			

Nummer (Aufgabe)	**Thema**	**maximale Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**	***Bemerkungen***
1	**Mittelwerte und Streumaße**			
Teil 1		**6**		
Teil 2		**3**		
Teil 3		**16**		
2	**Regression und Korrelation**	**25**		
3	**Ginikoeffizient und Lorenzkurve**	**25**		
4	**Wahrscheinlichkeits-rechnung**	**25**		
5	**Preisindex und Preisändeurng**	**25**		
Summe		**100**		

⇨ ***Anmerkung: Es kommen nur 4 der 5 Aufgaben in die Wertung; daher insgesamt 100 Punkte möglich.***

Klausur: Statistik **24.06.2019**

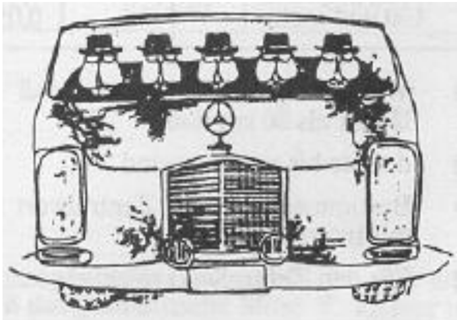
Jürgen Meisel

Hilfsmittel: Nicht progr. Taschenrechner
Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Aufgabe 1: Mittelwerte und Streumaße

Teil 1:

Im fünfköpfigen Vorstand der Zorro-AG sitzen verdiente Männer im Alter von 48, 53, 53, 55 und 62 Jahren.
Man plant eine Geschäftsreise nach Rio – allerdings kann das älteste Vorstandsmitglied aus privaten Gründen nicht mitfliegen – an seiner Stelle reist ein dynamischer Jung-Prokurist im Alter von 35 Jahren mit.
Wie ändern sich der Zentralwert und das arithmetische Mittel der reisenden Geschäftsleute gegenüber der ursprünglichen Planung?



Lösung:

Reihe 1: 48, 53, 53, 55, 62 $\quad \overline{x} = 54,2 \quad \overline{x_M} = 53$

Reihe 2: 35, 48, 53, 53, 55 $\quad \overline{x} = 48,8 \quad \overline{x_M} = 53$

Teil 2:

Sie kaufen an einem Marktstand 6 Apfelsinen für 2,00 €. An einem anderen Stand investieren Sie nochmals 2,00 € - erhalten aber dafür 10 Orangen.

Wie hoch ist der Durchschnittspreis der Orangen?

Lösung:

$$\left.\begin{array}{lcl} 6 \text{ Apfelsinen} & \leftrightarrow & 2,00\text{ €} \\ 10 \text{ Apfelsinen} & \leftrightarrow & 2,00\text{ €} \end{array}\right\} \quad \frac{4,00\,[\text{€}]}{16\,[\text{Apfelsinen}]} = 0,25\ \text{€}/\text{Apfelsine}$$

Teil 3:

Gegeben sei eine Übersicht über die geleistete Wochenarbeitszeit in der Bundesrepublik Deutschland (Erwerbstätige in 1.000):

Stunden	gesamt
unter 21	2334
21 bis unter 36	4200
36 bis unter 41	22496
41 und mehr	5207

Bei den folgenden Berechnungen sind die Klassengrenzen bei 15 h und bei 50 h zu schließen.

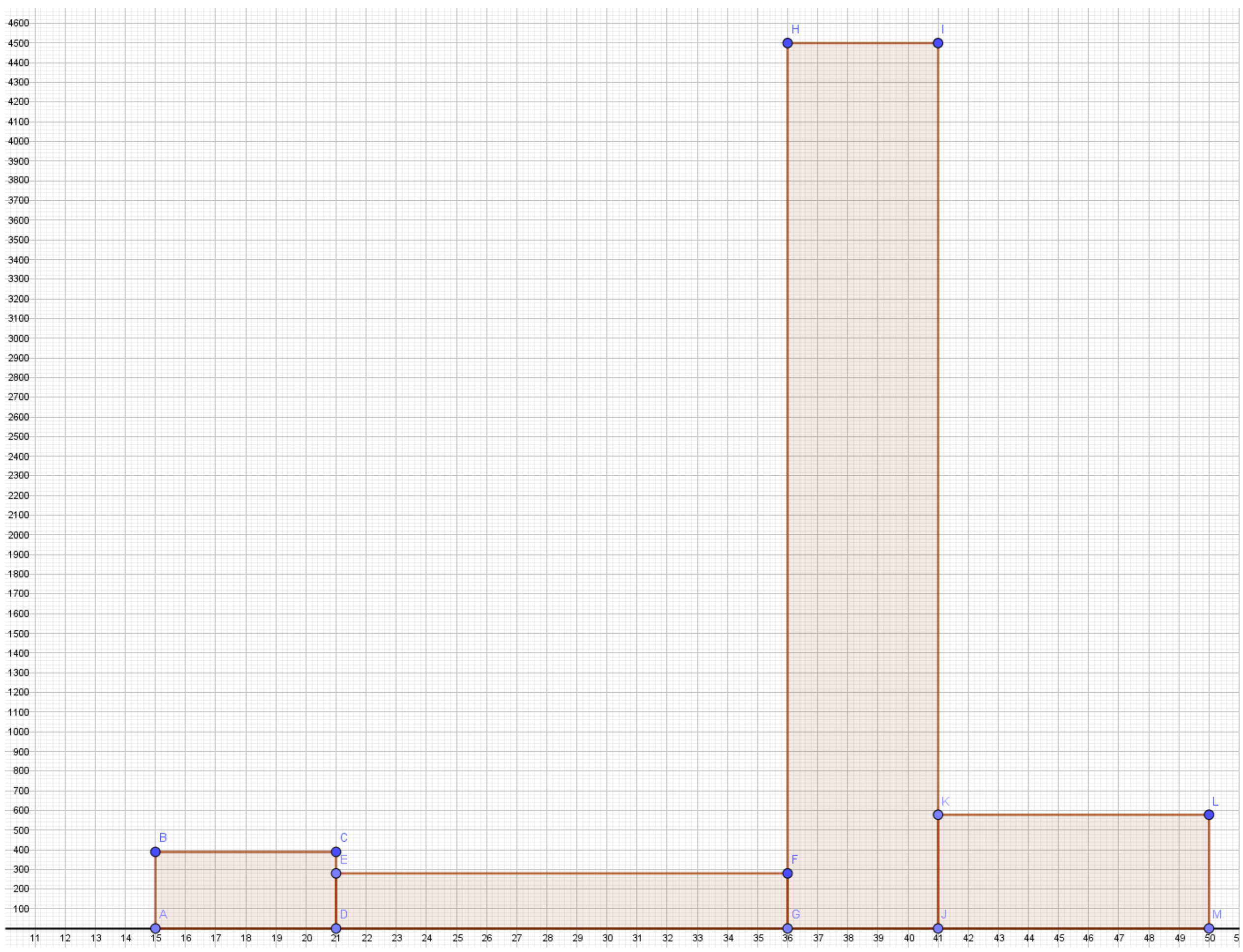
a) Bestimmen Sie den Median, die beiden Quartile und erstellen Sie einen Boxplot.
b) Ermitteln Sie nun noch den arithmetischen Mittelwert und die Stand.Abw..
c) Wo liegt der Modalwert?
d) Erstellen Sie das zugehörige Histogramm.

Lösung:

Punkte:	$15 \leq x < 21$	$21 \leq x < 36$	$36 \leq x < 41$	$41 \leq x \leq 50$
Anzahl Personen	**2.334**	**4.200**	**22.496**	**5.207**
Relative Häufigkeit	**0,07**	**0,12**	**0,66**	**0,15**
Summierte rel. H	**0,07**	**0,19**	**0,85**	**1,00**
Klassenbreite	**6**	**15**	**5**	**9**
HDI	$\frac{2.334}{6} = 389$	$\frac{4.200}{15} = 280$	$\frac{22.496}{5} \approx 4.500$	$\frac{5.207}{9} \approx 578$
Klassenmitte	**18**	**28,5**	**38,5**	**45,5**

a)

Histogramm:



Modus: Modale Klasse (größte HDI): => [36;41[=> Modus (Klassenmitte): 38,5

Arithmetisches Mittel und Standardabweichung

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow \mu = 36{,}94 \qquad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - \mu^2} \Rightarrow \sigma = 6{,}778$$

Anmerkung: Verwendung der Klassenmitten.

Median und Quartile

$$\overline{x_M} = a + \frac{\Delta_i \cdot (0{,}5 - F(a))}{p_i} \rightarrow \overline{x_M} = 36 + \frac{5 \cdot (0{,}5 - 0{,}19)}{0{,}66} = 38{,}35$$

$$\overline{x_{0,25}} = a + \frac{\Delta_i \cdot (0{,}25 - F(a))}{p_i} \rightarrow \overline{x_{0,25}} = 36 + \frac{5 \cdot (0{,}25 - 0{,}19)}{0{,}66} = 36{,}45$$

$$\overline{x_{0,75}} = a + \frac{\Delta_i \cdot (0{,}75 - F(a))}{p_i} \rightarrow \overline{x_{0,75}} = 36 + \frac{5 \cdot (0{,}75 - 0{,}19)}{0{,}66} = 40{,}24$$

Aufgabe 2: Regression & Korrelation

Zwischen dem Hopfenpreis in € je Handelseinheit und dem Bierpreis in Cent je Liter bestehe folgender Zusammenhang:

Hopfenpreis	**6**	**8**	**5**	**7**	**4**
Bierpreis	**120**	**150**	**125**	**145**	**110**

a) Bestimmen Sie die lineare Regressionsfunktion für den Bierpreis bei gegebenem Hopfenpreis.
b) Welcher Bierpreis ist bei einem Hopfenpreis von 6,50 zu erwarten?
c) Welcher Hopfenpreis muss bei einem Bierpreis von 250 vorgelegen haben?
d) Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizient nach Brevais-Pearson?

Lösung:

Lineare Regression $f(x) = 10x + 70$

$$f(6{,}5) = 10 \cdot 6{,}5 + 70 = 135 \qquad und \qquad 250 = 10 \cdot x + 70 \rightarrow x = 18$$

Korrelationskoeffizient: r = 0,9325 (= starke positive Korrelation)

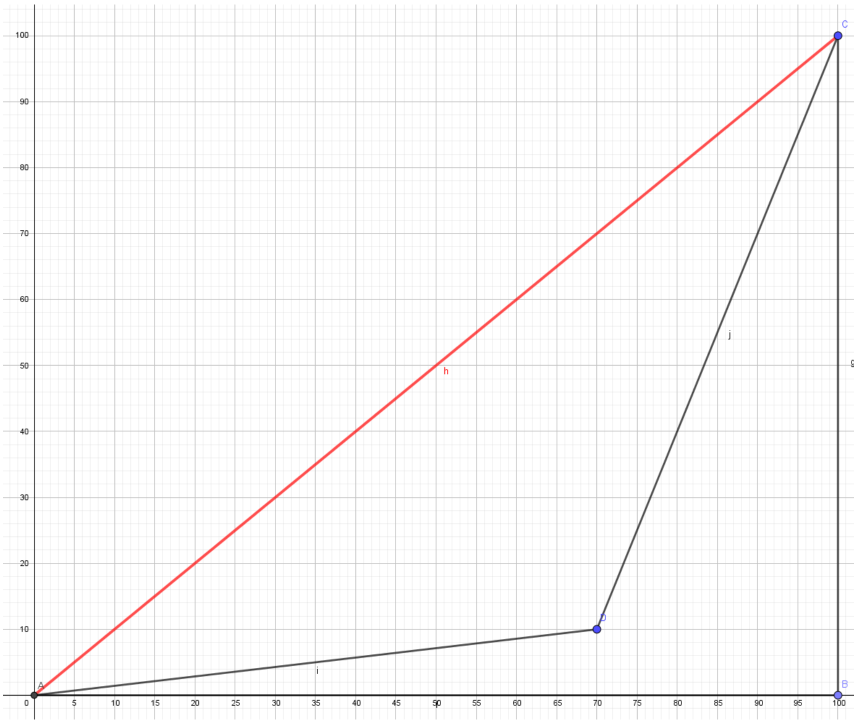
Aufgabe 3: Ginikoeffizient und Lorenzkurve

Im Land A erhalten 70 % der Bevölkerung 10 % des Volksvermögens; im Land B entfällt auf 80 % der Bevölkerung ca. 20 % des Vermögens.

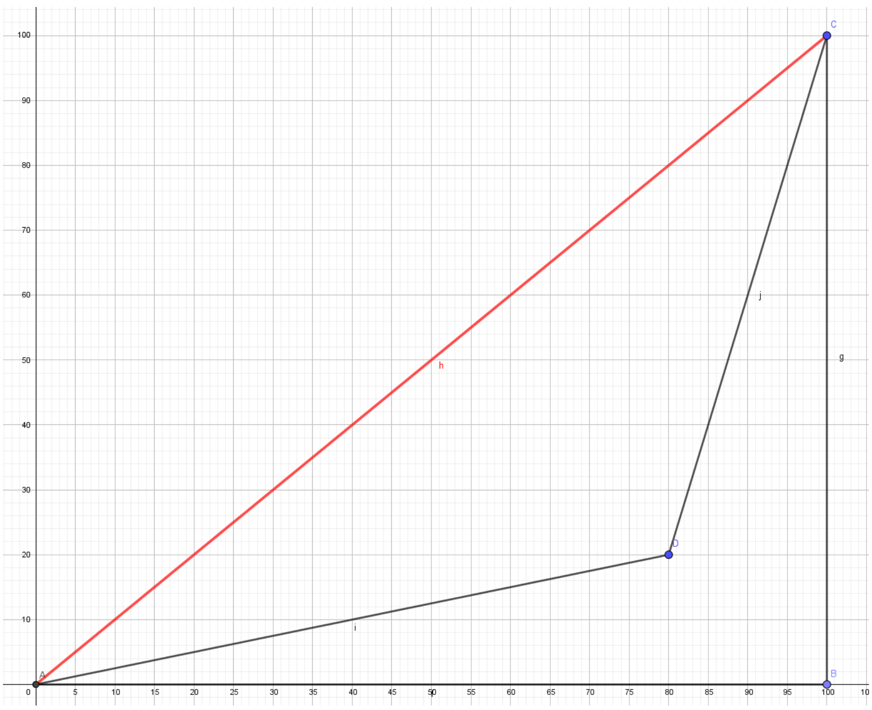
a) Zeichnen Sie die jeweiligen Lorenzkurven und ermitteln Sie die beiden Ginikoeffizienten.

<u>**Lösung:**</u>

Lorenzkurve Land A



Lorenzkurve Land B



Fläche unter Lorenzkurve Land A:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2}\cdot 0{,}7\cdot 0{,}1 = 0{,}035 \\ A_2 &= \frac{1}{2}\cdot(0{,}1+1)\cdot 0{,}3 = 0{,}165 \end{aligned}\right\} A_{ges} = 0{,}2$$

Fläche unter Gleichverteilungskurve: $A = 0{,}5\cdot 1\cdot 1 = 0{,}5$

$$GK = \frac{0{,}5-0{,}2}{0{,}5} = 0{,}6$$

Fläche unter Lorenzkurve Land B:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2}\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2 = 0{,}08 \\ A_2 &= \frac{1}{2}\cdot(0{,}2+1)\cdot 0{,}2 = 0{,}12 \end{aligned}\right\} A_{ges} = 0{,}2$$

Fläche unter Gleichverteilungskurve: $A = 0{,}5\cdot 1\cdot 1 = 0{,}5$

$$GK = \frac{0{,}5-0{,}2}{0{,}5} = 0{,}6$$

b) Welche der nachfolgenden Aussagen treffen zu?

- ☐ Die Lorenzkurve kann die Gleichverteilungsgerade schneiden.
- X Die Lorenzkurve kann die Gleichverteilungsgerade nicht schneiden.
- X Die Lorenzkurve kann die Gleichverteilungsgerade tangieren.
- ☐ Die Lorenzkurve kann die Gleichverteilungsgerade nicht tangieren.
- X Die Lorenzkurve hat mit der Gleichverteilungsgerade **mind.** 2 Punkte gemein.
- ☐ Die Lorenzkurve hat mit der Gleichverteilungsgerade **immer nur genau** 2 Punkte gemein.

Aufgabe 4: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Jedes Jahr muss die Kindertagesstätte „Kleine Knödel" einen nicht geringen Geldbetrag für Fotokopien einplanen. Ein Teil der Kosten entsteht, weil der Fotokopierer Blätter falsch einzieht, Papierstau entsteht oder sonstige Fehlfunktionen auftreten. Die Herstellerfirma des gerade neu angeschafften Kopierers verspricht, dass die Ausschussquote bei nur 6 % liegt. In der Kita werden im Lauf eines Jahres rund 1.500 Kopien gemacht.

a) Wie viele Fehlkopien sind im Durchschnitt pro Jahr bei dem neuen Kopierer zu erwarten?

b) Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit mit
   i) höchstens 100 bzw.
   ii) mindestens 80 bzw.
   iii) zwischen 90 und 120 Fehlkopien zu rechnen ist.

c) Wie viele Kopien müssen mind. gemacht werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mind. 99,9 % mind. eine Fehlkopie darunter ist?

d) Erläutern Sie den Unterschied hinsichtlich der Ergebnisse bezüglich folgender Fragestellungen u.a. mit Hilfe graphischer Darstellungsform:

Frage 1:

Wie viele Fehlkopien liegen mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % **mindestens** vor?

Frage 2:

Wie viele Fehlkopien liegen mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % **höchstens** vor?

Lösung:

$$\mu = 1500 \cdot 0{,}06 = 90 \qquad \sigma = \sqrt{1500 \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}94} = 9{,}2$$

$$P(X \le 100) = \Phi\left(\frac{10}{9{,}2}\right) = \Phi(1{,}09) = 0{,}862$$

$$P(X \ge 80) = 1 - \Phi\left(-\frac{10}{9{,}2}\right) = \Phi(1{,}09) = 0{,}862$$

$$P(90 \le X \le 120) = \Phi\left(\frac{30}{9{,}2}\right) - \Phi(0) = \Phi(3{,}26) - \Phi(0) \approx 0{,}5$$

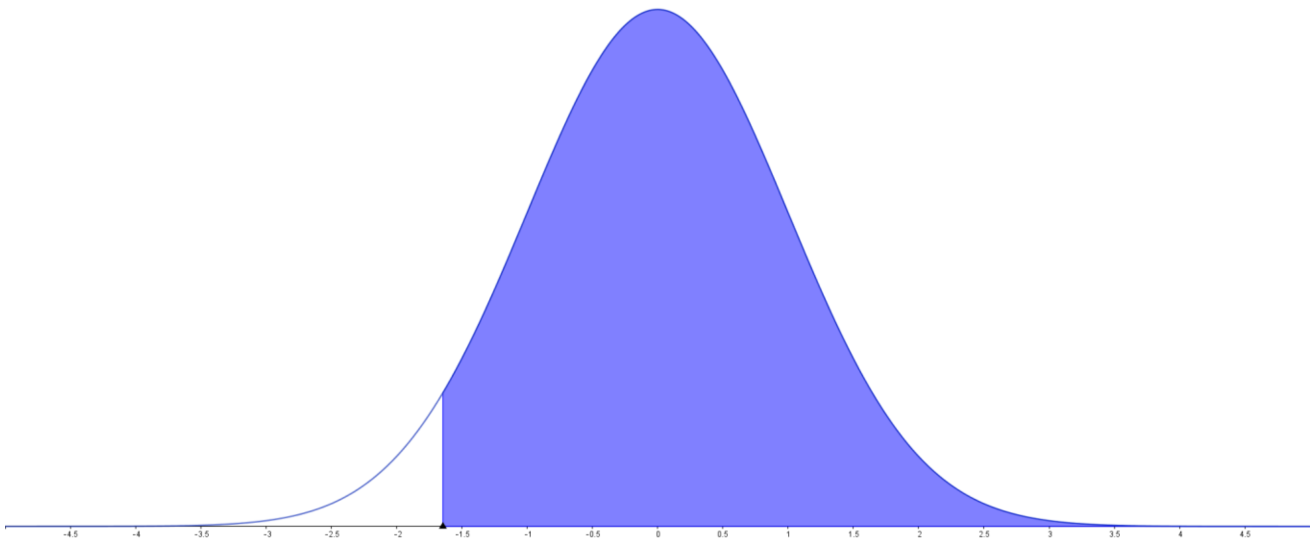
$$B_{n;0,06}(X \ge 1) \ge 0{,}999 \rightarrow 1 - B_{n;0,06}(X = 0) \ge 0{,}999$$

$$\rightarrow B_{n;0,06}(X = 0) \le 0{,}001$$

$$\rightarrow \binom{n}{0} \cdot 0{,}06^0 \cdot 0{,}94^n \le 0{,}001$$

$$\rightarrow n \ge \frac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}94)} = 111{,}64 \rightarrow n \ge 112$$

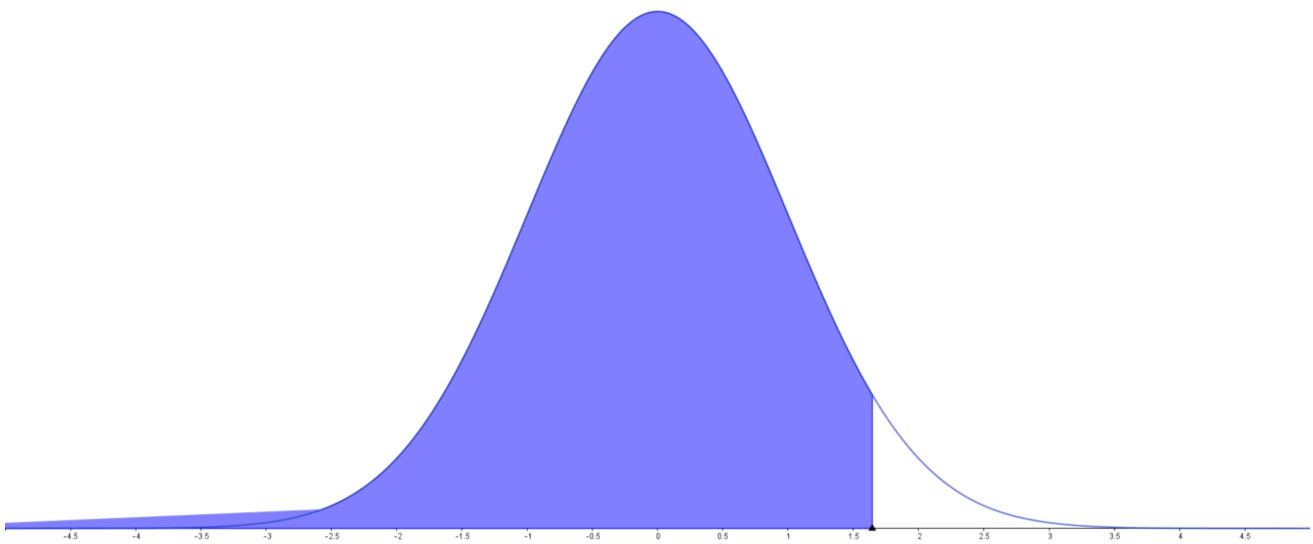
Mindestanzahl an Fehlkopien: Untere Grenze



$$\Phi(-1{,}645) \quad = \quad 0{,}05 \quad \rightarrow \quad -1{,}645 \quad = \quad \frac{k-90}{9{,}2} \quad \rightarrow \quad k \quad = \quad 74{,}8331$$

Antwort: Es liegen mind. 75 Fehlkopien mit einer W'keit von 95 % vor.

Höchstanzahl an Fehlkopien: Obere Grenze



$$\Phi(1{,}645) \quad = \quad 0{,}95 \quad \rightarrow \quad 1{,}645 \quad = \quad \frac{k-90}{9{,}2} \quad \rightarrow \quad k \quad = \quad 105{,}1669$$

Antwort: Es liegen höchstens 105 Fehlkopien mit einer W'keit von 95 % vor.

Aufgabe 5: Preisindex und Preisänderung

Es werde ein Warenkorb mit vier Gütern herangezogen. Mengen und Preise sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

	Jahr 2015		Jahr 2019	
Gut Nr.	Menge	Preis/ME	Menge	Preis/ME
1	40	10	48	14
2	30	20	24	28
3	20	30	16	48
4	10	40	12	64

a) Berechnen Sie den Preisindex nach Laspeyres für 2019 zur Basis 2015 und die jährliche Preissteigerung.

b) Berechnen Sie den Preisindex nach Paasche für 2019 zur Basis 2015.

c) Ermitteln Sie die jährliche Preissteigerung auf der Basis von Laspeyeres.

d) Erläutern Sie kurz auf welcher Basis bzw. welchem Grundgedanken die Ermittlung der Preisindices basiert und welche Institution(en) in der Bundesrepublik Deutschland diese ermitteln.

e) Wie hoch ist die aktuelle Inflationsquote in der Bundesrepublik Deutschland?

Lösung:

a) nach Laspeyres:
$$L_P = \frac{\sum p_{1i} \cdot q_{0i}}{\sum p_{0i} \cdot q_{0i}} = \sum \frac{p_{1i}}{p_{0i}} \cdot \frac{p_{0i} \cdot q_{0i}}{\sum p_{0i} \cdot q_{0i}} \quad mit\ i \in N$$

$$L_P = \frac{40 \cdot 15 + 30 \cdot 28 + 20 \cdot 48 + 10 \cdot 64}{40 \cdot 10 + 30 \cdot 20 + 20 \cdot 30 + 10 \cdot 40} = \frac{3.000}{2.000} = 1,5$$

b) nach Paasche:
$$P_P = \frac{\sum p_{1i} \cdot q_{1i}}{\sum p_{0i} \cdot q_{1i}} = \sum \frac{p_{1i}}{p_{0i}} \cdot \frac{p_{0i} \cdot q_{1i}}{\sum p_{0i} \cdot q_{1i}} \quad mit\ i \in N$$

$$P_P = \frac{48 \cdot 14 + 24 \cdot 28 + 16 \cdot 48 + 12 \cdot 64}{48 \cdot 10 + 24 \cdot 20 + 16 \cdot 30 + 12 \cdot 40} = \frac{2.880}{1.920} = 1,5$$

c) $q = \sqrt[4]{1,5} = 1,1067 \xrightarrow[\cdot 100]{-1} p = 10,67\ \%$

d) Warenkorbmethode Basisperiode => Berichtsperiode; Vier-Personen-HH; Panelmethode

e) Bundesrepublik Deutschland: 1,4 % Euro-Zone: 1,2 %

Formelsammlung Statistik

Lageparameter und Streumaße:

Teil 1: Diskrete Merkmalsdarstellung (Einzelwerte)

Einfaches arithmetisches Mittel: $\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \left[oder \qquad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \right]$

Median (Zentralwert):

$$\overline{x_M} = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & \text{für n ungerade} \\ \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1} \right) & \text{für n gerade} \end{cases}$$

Modus: *Häufigster Wert einer Verteilung.*

Teil 2: Klassierte Merkmalsausprägungen

Arithmetisches Mittel bei klassierten Merkmalsausprägungen:

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left[(x_i)_m \cdot n_i \right] = \sum_{i=1}^{k}\left[(x_i)_m \cdot \frac{n_i}{n} \right] \quad mit\ (x_i)_m\ als\ Klassenmitte\ der\ Klasse\ i$$

Modus / Modalwert:

- ⇨ **Modale Klasse: Klasse mit max. Häufigkeitsdichte**
- ⇨ **Modus / Modalwert: Wert der Klassenmitte der modalen Klasse**

Median und Quartile:

Median (bei intervallskaliertem Merkmal): $\bar{X}_{0,5} \in [a;b],\ \bar{X}_{0,5} = a + \frac{\Delta_i \cdot (0,5 - F(a))}{p_i}$

unteres Quartil (bei intervallskaliertem Merkmal): $\bar{X}_{0,25} \in [a;b],\ \bar{X}_{0,25} = a + \frac{\Delta_i \cdot (0,25 - F(a))}{p_i}$

oberes Quartil (bei intervallskaliertem Merkmal): $\bar{X}_{0,75} \in [a;b],\ \bar{X}_{0,75} = a + \frac{\Delta_i \cdot (0,75 - F(a))}{p_i}$

Gini-Koeffizient: *Berechung der Flächen mit relativen kumulierten Häufigkeiten*

$$Gini = \frac{\text{Konzentrationsfläche K}}{\text{maximale Konzentrationsfläche } K_{\max}}$$

Anmerkung: Als *„Konzentrationsfläche" K* bezeichnet man die Fläche, zwischen der Gleichverteilungsdiagonalen und der LORENZ-Kurve: $0 \le K \le 1/2$.

Der Wertebereich des Gini-Koeffizienten liegt zwischen 0 (= Gleichverteilung) und 1 (= vollständige Konzentration auf einen Merkmalsträger).

Preisindizes

nach Laspeyres:

$$L_P = \frac{\sum p_{1i} \cdot q_{0i}}{\sum p_{0i} \cdot q_{0i}} = \sum \frac{p_{1i}}{p_{0i}} \cdot \frac{p_{0i} \cdot q_{0i}}{\sum p_{0i} \cdot q_{0i}} \quad mit\ i \in N$$

nach Paasche:

$$P_P = \frac{\sum p_{1i} \cdot q_{1i}}{\sum p_{0i} \cdot q_{1i}} = \sum \frac{p_{1i}}{p_{0i}} \cdot \frac{p_{0i} \cdot q_{1i}}{\sum p_{0i} \cdot q_{1i}} \quad mit\ i \in N$$

Lineare Regression und Korrelation

Ansatz: $y = b_0 + b_1 x \qquad \mu_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \mu_y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$

$$b_1 = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{x^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) - n \cdot \mu_x \cdot \mu_y}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2\right) - n \cdot \mu_x^2} \qquad b_0 = \mu_y - b_1 \cdot \mu_x$$

Korrelation nach Brevais-Pearson:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x)\cdot(y_i - \mu_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu_y)^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) - n \cdot \mu_x \cdot \mu_y}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2\right) - n \cdot \mu_x^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i^2\right) - n \cdot \mu_y^2}}$$

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Binomialverteilung:

$$B(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad mit \quad k \le n$$

Erwartungswert der Zufallsvariablen: $\mu = n \cdot p$

Varianz der Zufallsvariablen: $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p) = \mu \cdot (1-p)$

Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung - (Standard)Normalverteilung:

$$P(X \le k) = \Phi_{\mu;\sigma}\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) \quad und \quad x = \frac{k-\mu}{\sigma}$$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \quad und \quad \Phi(x) - \Phi(-x) = 2\Phi(x) - 1$$

Gaußsche Summenfunktion – **Tabelle zur Normalverteilung**

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532	0,536
0,1	0,540	0,544	0,548	0,552	0,556	0,560	0,564	0,567	0,571	0,575
0,2	0,579	0,583	0,587	0,591	0,595	0,599	0,603	0,606	0,610	0,614
0,3	0,618	0,622	0,626	0,629	0,633	0,637	0,641	0,644	0,648	0,652
0,4	0,655	0,659	0,663	0,666	0,670	0,674	0,677	0,681	0,684	0,688
0,5	0,691	0,695	0,698	0,702	0,705	0,709	0,712	0,716	0,719	0,722
0,6	0,726	0,729	0,732	0,736	0,739	0,742	0,745	0,749	0,752	0,755
0,7	0,758	0,761	0,764	0,767	0,770	0,773	0,776	0,779	0,782	0,785
0,8	0,788	0,791	0,794	0,797	0,800	0,802	0,805	0,808	0,811	0,813
0,9	0,816	0,819	0,821	0,824	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839
1,0	0,841	0,844	0,846	0,848	0,851	0,853	0,855	0,858	0,860	0,862
1,1	0,864	0,867	0,869	0,871	0,873	0,875	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,885	0,887	0,889	0,891	0,893	0,894	0,896	0,898	0,900	0,901
1,3	0,903	0,905	0,907	0,908	0,910	0,911	0,913	0,915	0,916	0,918
1,4	0,919	0,921	0,922	0,924	0,925	0,926	0,928	0,929	0,931	0,932
1,5	0,933	0,934	0,936	0,937	0,938	0,939	0,941	0,942	0,943	0,944
1,6	0,945	0,946	0,947	0,948	0,949	0,951	0,952	0,953	0,954	0,954
1,7	0,955	0,956	0,957	0,958	0,959	0,960	0,961	0,962	0,962	0,963
1,8	0,964	0,965	0,966	0,966	0,967	0,968	0,969	0,969	0,970	0,971
1,9	0,971	0,972	0,973	0,973	0,974	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977
2,0	0,977	0,978	0,978	0,979	0,979	0,980	0,980	0,981	0,981	0,982
2,1	0,982	0,983	0,983	0,983	0,984	0,984	0,985	0,985	0,985	0,986
2,2	0,986	0,986	0,987	0,987	0,987	0,988	0,988	0,988	0,989	0,989
2,3	0,989	0,990	0,990	0,990	0,990	0,991	0,991	0,991	0,991	0,992
2,4	0,992	0,992	0,992	0,992	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,994
2,5	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995
2,6	0,995	0,995	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996
2,7	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997
2,8	0,997	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998
2,9	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,999	0,999	0,999