Klausur: Mathematik und Statistik

Lehrveranstaltung: Statistik

Fakultät für Wirtschaft

Studiengang: BWL-Öffentliche Wirtschaft

Datum: 24.06.2021

Studierende Matrikelnummer:

Dozent/in: Jürgen Meisel

Kurs: WOW20B **Semester:** 2.

Hilfsmittel: ***Wiss. TR (nicht programmierbar) / Formelsammlung***

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Bewertung: **Maximale Punktzahl:** 60 Punkte

Erreichte Punktzahl:

Datum, Unterschrift

……………………………………..

Anmerkungen:

Von 7 gestellten Aufgaben müssen 5 ausgewählt und bearbeitet werden.

Auf-gabennr.:	Thema / Bereich	maximale Punkte	erreichte Punkte	Bemerkungen
1	Mittelwerte & Streumaße (diskret)	12		
2	Mittelwerte & Streumaße (klassiert)	12		
3	Zeitreihenanalyse (Tertiale & Quartale)	12		
4	Konzentration (Ginikoeff. & Lorenzkurve)	12		
5	Regression & Korrelation	12		
6	Preisindizes und Inflationsrate	12		
7	Stochastik: Verteilung (diskret / stetig)	12		
		5 aus 7		
Summe		**60**		

Hilfsmittel: **Wiss. nicht progr. Taschenrechner + Formelsammlung**
Bearbeitungszeit: **60 Minuten**

Aufgabe 1: **Mittelwerte und Streumaße (diskret)**

Studenten möchten die Mietpreise für Studentenappartements in den Städten Mannheim und Basel vergleichen. Dazu wurden sowohl in Mannheim als auch in Basel 20 Appartements zufällig ausgewählt und die folgenden Preise erhoben:

Preise in Mannheim [€]	**210**	**220**	**250**	**280**	**290**	**300**	**320**	**340**
Anzahl Appartements	**2**	**5**	**3**	**4**	**2**	**2**	**1**	**1**

a) Ermitteln Sie folgende Werte bzgl. der Mietpreise in Mannheim:
   - ⇨ Arithmetisches Mittel und Standardabweichung
   - ⇨ Median und Quartil 1 und Quartil 3
   - ⇨ Modus/Modalwert

Preise in Basel [CHF]	**340**	**370**	**450**	**480**	**500**	**510**	**530**	**550**
Anzahl Appartements	**4**	**2**	**3**	**3**	**3**	**2**	**2**	**1**

b) Ermitteln Sie folgende Werte bzgl. der Mietpreise in Basel:
   - ⇨ Arithmetisches Mittel und Standardabweichung

c) Gehen Sie davon aus, dass 1,00 € genau 1,20 CHF entspricht.
   Vergleichen Sie nun durch geeignete Transformation die Ergebnisse arithmetisches Mittel und Standardabweichung der beiden Städte zueinander und beurteilen Sie die Mietpreissituation

Preise in Mannheim [€]	**210**	**220**	**250**	**280**	**290**	**300**	**320**	**340**	
Anzahl Appartements	**2**	**5**	**3**	**4**	**2**	**2**	**1**	**1**	20
	420	1100	750	1120	580	600	320	340	5230
	88200	242000	187500	313600	168200	180000	102400	115600	1397500
Mittelwert	261,5		Median	(x10+x11)/2	265		Modus	220	
Varianz	1492,75		Quartil 1	(x5+x6)/2	220				
Standardabweichung	38,64		Quartil 3	(x15+x16)/2	290				
Preise in Basel [CHF]	**340**	**370**	**450**	**480**	**500**	**510**	**530**	**550**	
Anzahl Appartements	**4**	**2**	**3**	**3**	**3**	**2**	**2**	**1**	20
	1360	740	1350	1440	1500	1020	1060	550	9020
	462400	273800	607500	691200	750000	520200	561800	302500	4169400
Mittelwert	451								
Varianz	5069								
Standardabweichung	71,20								

Lineare Transformation: Mannheim => Basel

Arithmetisches Mittel:

$$E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b$$
$$E(a \cdot X + b) = 1{,}2 \cdot 261{,}5 + 0 = 313{,}8$$

Standardabweichung:

$$V(a \cdot X) = a^2 \cdot V(X) \quad und \quad V(X + b) = V(X)$$
$$V(a \cdot X) = 1{,}2^2 \cdot 1.492{,}75 = 2.149{,}56$$
$$\rightarrow \quad S(X) = \sqrt{2.149{,}56} = 46{,}36$$

Ergebnis:
Das arithmetische Mittel der Mietpreise und die Standardabweichung bzw. Streuung sind in Mannheim wesentlich geringer als in Basel.

Aufgabe 2: **Mittelwerte und Streumaße (klassiert)**

In einer Untersuchung über das monatliche Nettoeinkommen der Eltern von 200 Studierenden wird das arithmetische Mittel mit 1.970 Euro ausgewiesen.
Es liegen die folgenden (auf den ersten Blick unvollständigen) Informationen vor:

Einkommensklasse	**Anzahl**	**p_i**	**Σp_i**	**Klassen-breite**	**Klassen-mitte**	**HDI**
[600 - 1.200[	**20**					
[1.200 – 1.500[	**20**					
[1.500 – 2.100[	**unlesbar**					
[2.100 – 2.700[	**unlesbar**					**0,1**
[2.700 – 3.000]	**10**					
]über 3.000]	**10**					
Summe	**200**		**---**	**---**	**---**	**---**

a) Wie viele Einkommen liegen in den beiden Klassen mit unlesbarer absoluter Häufigkeit?

b) Füllen Sie die Tabelle komplett aus.

c) Welche Klassenmitte wurde für die Klasse „über 3.000 €“ verwendet, um den angegebenen arithmetischen Mittelwert zu erhalten?

d) Ermitteln Sie noch folgende Werte:
   - ⇨ Varianz und Standardabweichung
   - ⇨ Median und Quartil 1 und Quartil 3
   - ⇨ Modus/Modalwert

Einkommensklasse	Anzahl	p_i	$\Sigma\ p_i$	Klassen-breite	Klassen-mitte	HDI		Zur Berechnung der Varianz
[600 - 1.200[	20	0,1	0,1	600	900	0,033		16200000
[1.200 – 1.500[	20	0,1	0,2	300	1350	0,067		36450000
[1.500 – 2.100[	80	0,4	0,6	600	1800	0,133		259200000
[2.100 – 2.700[	60	0,3	0,9	600	2400	0,1		345600000
[2.700 – 3.000]	10	0,05	0,95	300	2850	0,033		81225000
]über 3.000]	10	0,05	1		3250	#DIV/0!		105625000
Summe	200	1	---	---	---	---		844300000

Mittelwert	1.970,00			
Klassenmitte	1.807,50	Formel:	(C14*G14+C15*G15+C16*G16+C17*G17+C18*G18+C19*X)/C20	
Differenz:	162,50	/0,05	3250	=X

Varianz	340.600,00
Standardabweichung	583,61

Modus: Modale Klasse: [1.500 – 2.100[=> Modus = 1.800

Median:

$$\overline{x_M} \Rightarrow \overline{x_{0,5}} = [1.500\,;2.100] \rightarrow \overline{x_{0,5}} = 1.500 + \frac{600\cdot[0,5-0,2]}{0,4} = 1.950$$

Quartile:

$$q_1 \Rightarrow \overline{x_{0,25}} = [1.500\,;2.100] \rightarrow \overline{x_{0,25}} = 1.500 + \frac{600\cdot[0,25-0,2]}{0,4} = 1.575$$

$$q_3 \Rightarrow \overline{x_{0,75}} = [2.100\,;2.700] \rightarrow \overline{x_{0,75}} = 2.100 + \frac{600\cdot[0,75-0,6]}{0,3} = 2.400$$

Aufgabe 3: **Zeitreihenanalyse**

Bestimmen Sie die „saisonbereinigten" Zahlen der Wahlbeteiligung der Bundestagswahlen von 1969 bis 2017

=> Bitte verwenden Sie hierfür die **Anlage – Zeitreihenanalyse**.

Aufgabe 4: **Konzentration (Gini-Koeffizient und Lorenzkurve)**

Bei einem exklusiven Lotteriespiel wird eine Gesamtsumme von 1.000.000 € an 10 Spieler als Gewinn ausgeschüttet. Um die Konzentration grafisch darzustellen, soll die Lorenzkurve benutzt werden.

a) Kreuzen Sie den Punkt an, der niemals auf einer Lorenzkurve liegen kann:

A(0 / 0) **B(0,5 / 0,5)** **C(0,5 / 0,8)** **D(0,8 / 0,5)** **E(1 / 1)**

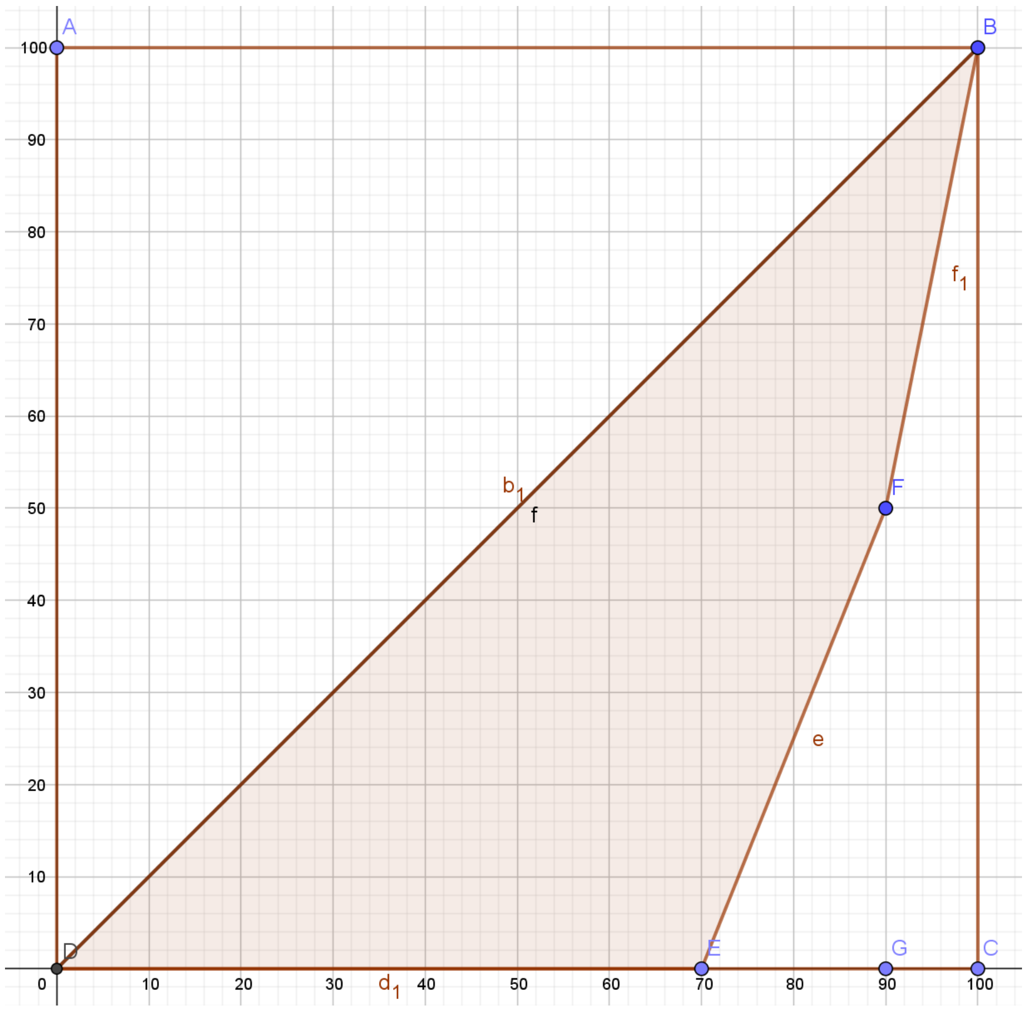
b) Falls für das Lotteriespiel der Punkt T(0,5 / 0,2) auf der Lorenzkurve liegt, so bedeutet dies:

- ☐ 500.000 € wurden auf 20 % der Mitspieler mit den geringsten Gewinnen verteilt.
- ☐ 200.000 € wurden auf 50 % der Mitspieler mit den höchsten Gewinnen verteilt.
- ☐ Die Hälfte der Mitspieler erhielt einen Gewinn von jeweils 200.000 €.
- ☐ 800.000 € wurden auf 50 % der Mitspieler mit den höchsten Gewinnen ausgeschüttet.

c) Über die Gewinnverteilung in der **Ziehung A** ist nun bekannt, dass ein Spieler den Hauptgewinn von 500.000 € erhielt und zwei weitere Spieler eine Gewinnauszahlung von je 250.000 € bekamen.
Der Rest der 10 Spieler ging leer aus.
Zeichnen Sie die zugehörige Lorenzkurve und berechnen Sie den Gini-Koeffizienten.

d) In einer **Ziehung B** werden erneut 1.000.000 € an die 10 Spieler verteilt. Anstelle der Lorenzkurve wird nun die Konzentration der Gewinnverteilung mit dem Gini-Koeffizienten gemessen.
Ein höherer Gini-Koeffizient bei Ziehung A als bei Ziehung B bedeutet:

- ☐ Die Konzentration der Gewinnverteilung bei **Ziehung A** ist stärker als bei der **Ziehung B**.
- ☐ Die Konzentration der Gewinnverteilung bei **Ziehung B** ist stärker als bei der **Ziehung A**.
- ☐ Ein Vergleich der beiden Konzentrationen ist ohne zusätzliche Information nicht möglich



Gini-Koeffizient: **GK = 0,75**

10 Teilnehmer			Gewinne			
Anzahl	rel. Häufigkeit	kum. rel. H'keit	Einzelsumme	Summe/Klasse	rel. Häufigkeit	kum. rel. H'keit
7	0,7	0,7	0,00	0	0	0
2	0,2	0,9	250.000,00	500000	0,5	0,5
1	0,1	1	500.000,00	500000	0,5	1
10	1		1.000.000,00	1.000.000,00	1	

GK:	0,75	
Fläche 1:	0,2*0,5*0,5	0,05
Fläche 2:	0,5*(0,5+1)*(	0,075
Summe:		0,125
KF		0,375
GK		0,75

Aufgabe 5: Regression & Korrelation

Die Tabelle dokumentiert am Beispiel von 10 Städten den Anteil der Führerscheininhaber unter 21 Jahren (= X) und den Anteil der Unfälle pro 1000 Führerscheinlizenzen (= Y) in der jeweiligen Stadt. Die Daten sind der folgenden Tabelle zu entnehmen.

Stadt	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
X	**13**	**12**	**8**	**11**	**18**	**9**	**16**	**12**	**17**	**14**
Y	**3,0**	**1,8**	**1,5**	**2,0**	**2,4**	**1,6**	**3,5**	**1,9**	**2,8**	**3,0**

a) Bestimmen Sie die lineare Regressionsfunktion zwischen Führerscheininhaber und Unfällen.

b) Welche Unfallquote kann man bei einen Führerscheinanteil von 20 erwarten?

c) Welcher Führerscheinanteil darf bei einer Unfallquote von 5,0 vermutet werden?

d) Ermitteln Sie die Korrelation nach ***Pearson*** und die Kovarianz zwischen X und Y.

Regressions-gerade	**Steigung:**		**0,154**		**Gerade:**	**0,15x + 0,35**
	y-Achsenabschnitt:		**0,35**			
Korrelations-koeffizient:	**0,73686596**		**Kovarianz**	**1,51**		

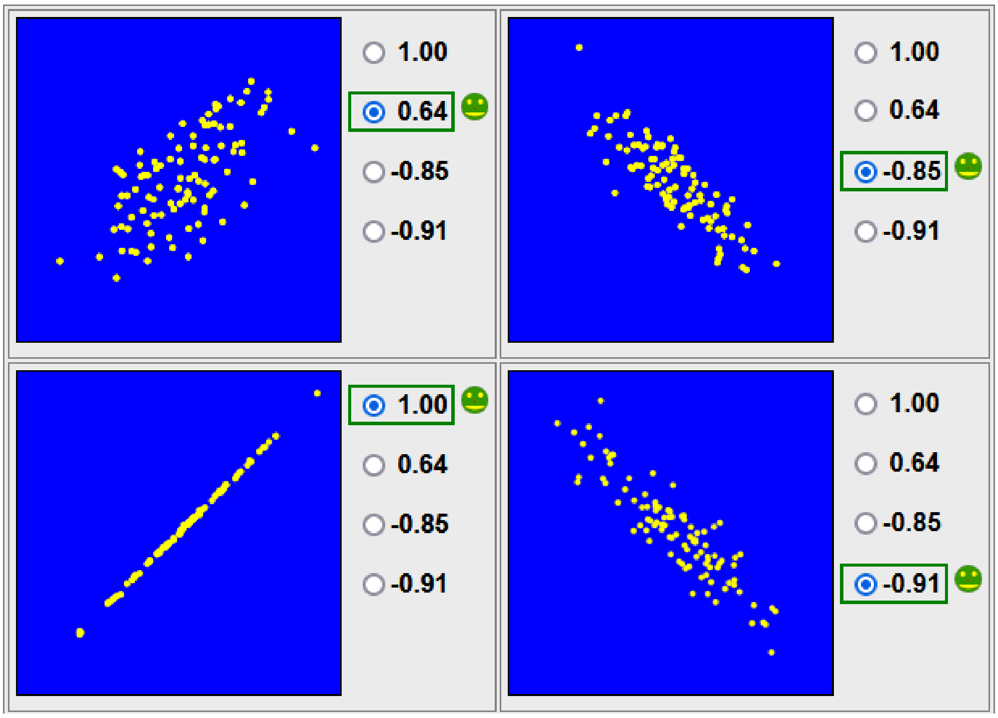
Welche Unfallquote kann man bei einen Führerscheinanteil von 20 erwarten?

$$y = 0,35 + 0,15x \rightarrow y = 0,35 + 0,15 \cdot 20 \rightarrow y = 3,35$$

Welcher Führerscheinanteil darf bei einer Unfallquote von 5,0 vermutet werden

$$y = 0,35 + 0,15x \rightarrow 5,0 = 0,35 + 0,15 \cdot x \rightarrow x = 31$$

e) Ordnen Sie die Streudiagramme den Korrelationskoeffizienten zu.



Aufgabe 6: **Preisindizes und Inflation**

Der Warenkorb zur Ermittlung der Preisindizes wird auch regionalspezifisch berechnet. Daher existiert natürlich auch der Pfälzische Warenkorb unter der Abkürzung WWW => **W**(eck)**W**(orschd)**W**(oi).

Folgende Daten sind für Kuno Knollenoos bekannt:

Produkte	Daten aus Juni 2017			Daten aus Juni 2020		
	Menge	Preis (pro ME)	Umsatz in €	Menge	Preis (pro ME)	Umsatz in €
Weck	60		18,00	70	0,40	
Brot	10	3,00			4,20	42,00
Worschd		5,00	40,00		6,00	60,00
Weißwoi	12		36,00	15		60,00
Rotwoi		3,00	45,00	10	3,50	

a) Berechnen Sie die Preisindizes nach Laspeyres, Paasche und Fisher.

b) Bestimmen Sie die jährliche Preisänderungsrate aufgrund des Index nach Laspeyres.

Produkte	Daten aus Juni 2017			Daten aus Juni 2020		
	Menge	Preis (pro ME)	Umsatz in €	Menge	Preis (pro ME)	Umsatz in €
Weck	60	0,3	18	70	0,4	28
Brot	10	3	30	10	4,2	42
Worschd	8	5	40	10	6	60
Weißwoi	12	3	36	15	4	60
Rotwoi	15	3	45	10	3,5	35
		Summe:	169		Summe:	225
	Laspeyres:	1,269				
			Fisher:	1,274	Preisänderung:	8,27
	Paasche	1,278				

Aufgabe 7: **Stochastik – Binomial- und Normalverteilung**

In einer Pfälzer Fabrik werden fettarme Kartoffelchips hergestellt und in Tüten zum Verkauf abgefüllt. Das durchschnittliche Gewicht der Tüten soll nach Werksangaben bei 400 Gramm liegen. Es wird eine Standardabweichung von 20 Gramm zugelassen.
Eine Tüte geht nur in den Verkauf, wenn diese Rahmendaten eingehalten werden.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) eine Tüte mindestens 420 Gramm wiegt?

$$P(X \geq 420) = 1 - P(X < 420) \overset{z=\frac{420-400}{20}}{\underset{z=1}{=}} 1 - \Phi(1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$$

b) eine Tüte höchstens 380 Gramm wiegt?

$$P(X \leq 380) \overset{z=\frac{380-400}{20}}{\underset{z=-1}{=}} \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$$

c) eine Tüte nicht in den Verkauf geht?

$$1 - P(380 \leq X \leq 420) = 1 - \left[2\Phi(1) - 1\right] = 0{,}3174$$

Nun wird noch eine Blind-Chipsverkostung durchgeführt. Ein Chips-Kenner behauptet mit einer Wahrscheinlichkeit von p = 0,8 (= 80 %) fettarme Kartoffelchips zu erkennen.
Es wird ein Test von 10 Proben durchgeführt.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt er in seiner Einschätzung

d) genau achtmal richtig? $B_{10;0,8}(X = 8) = \binom{10}{8} 0{,}8^8 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}302$

e) höchstens dreimal falsch? $B_{10;0,2}(X \leq 3) = \sum_{X=0}^{3} \binom{10}{X} 0{,}2^X \cdot 0{,}8^{10-X} = 0{,}8791$

Anlage zu Aufgabe 3: Zeitreihenanalyse

Jahr/ Tertial	Wahlbeteiligung [in %]	gleitender Durchschnitt	Differenz Tertial I	Differenz Tertial II	Differenz Tertial III	Saison-komponente	Saisonbereinigte Werte
1969 / I	86,7						
1972 / II	91,1						
1976 / III	90,7						
1980 / I	88,6						
1983 / II	89,1						
1987 / III	84,3						
1990 / I	77,8						
1994 / II	79,0						
1998 / III	82,2						
2002 / I	79,1						
2005 / II	77,7						
2009 / III	70,8						
2013 / I	71,5						
2017 / II	76,2						
		Durchschnitt					

Lösung:

Jahr/Tertial	Wahlbeteiligung [in %]	gleitender Durchschnitt	Differenz Tertial I	Differenz Tertial II	Differenz Tertial III	Saison-komponente	Saisonbereinigte Werte
1969 / I	86,7					-1,325	88,025
1972 / II	91,1	89,50		1,60		1,142	89,958
1976 / III	90,7	90,13			0,57	0,183	90,517
1980 / I	88,6	89,47	-0,87			-1,325	89,925
1983 / II	89,1	87,33		1,77		1,142	87,958
1987 / III	84,3	83,73			0,57	0,183	84,117
1990 / I	77,8	80,37	-2,57			-1,325	79,125
1994 / II	79	79,67		-0,67		1,142	77,858
1998 / III	82,2	80,10			2,10	0,183	82,017
2002 / I	79,1	79,67	-0,57			-1,325	80,425
2005 / II	77,7	75,87		1,83		1,142	76,558
2009 / III	70,8	73,33			-2,53	0,183	70,617
2013 / I	71,5	72,83	-1,33			-1,325	72,825
2017 / II	76,2					1,142	75,058
		Durchschnitt	-1,333	1,133	0,175		
		Kontrolle	-0,025	Korrektur:	-0,0083		
		Korrektur:					
		Durchscnitt (neu)	-1,325	1,142	0,183		