

Klausur: Mathematik und Statistik

Lehrveranstaltung: Statistik

Fakultät für Wirtschaft

Studiengang: BWL-Öffentliche Wirtschaft

Datum: 19.06.2024

Studierende(r)
Matrikelnummer:

Dozent: Jürgen Meisel

Kurs: WOW A/B

Studienjahrgang: 2023

Semester: 2

Hilfsmittel:

**Wiss. TR (nicht programmierbar) /
Formelsammlung mit eigenen
Ergänzungen**

Bearbeitungszeit:

60 Minuten

Bewertung:

Maximale Punktzahl: 60

Erreichte Punktzahl:

Datum, Unterschrift

Anmerkungen:

Von 8 gestellten Aufgaben müssen 5 ausgewählt und bearbeitet werden.

Aufgabennr.:	Thema / Bereich	maximale Punkte	erreichte Punkte	Bemerkungen
1	Mittelwerte & Streumaße (diskret)	12		
2	Mittelwerte & Streumaße (klassiert)	12		
3	Konzentration (Ginikoeff. & Lorenzkurve)	12		
4	Regression & Korrelation	12		
5	Preisindizes und Inflationsrate	12		
6	Stochastik: Verteilung (diskret)	12		
7	Stochastik: Verteilung (stetig)	12		
8	Zeitreihenanalyse	12		
		5 aus 8		
Summe		60		

Hilfsmittel: Wiss. Taschenrechner + Formelsammlung mit eigenen Ergänzungen
 Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Aufgabe 1: Mittelwerte und Streumaße (diskret)

Dozent Knackwurst unterrichtet an der Dualen Hochschule Mannheim im Schweiße seines Angesichts Mathematik und Statistik.

An verschiedenen Tagen notiert er die Zeiten (in Minuten), die er für seinen Weg zur Vorlesung benötigt: **55, 56, 51, 56, 25, 58, 54, 56, 56, 50, 52.**

Gegenüber seinen Studenten macht er folgende Aussage:

"In 25% der Vorlesungstage brauche ich 54 Minuten und mehr"

Um diese Aussage zu bewerten, empfiehlt ein guter Geist folgende Vorgehensweise:

- Bestimmen Sie aus den Daten folgende Größen:
Arithmetisches Mittel, Modus und Median
- Ermitteln Sie auch die zugehörigen Streumaße Standardabweichung und beide Quartile.
- Beurteilen Sie die obige Aussage mit den geeigneten Ergebnissen und entscheiden Sie, ob die Aussage korrekt/haltbar oder zu widerlegen ist.

Zeiten	Anzahl	kum. Anzahl	Produkt	Quadrat Zeiten	* Anzahl		
25	1	1	25	625	625		
50	1	2	50	2500	2500		
51	1	3	51	2601	2601		
52	1	4	52	2704	2704		
54	1	5	54	2916	2916		
55	1	6	55	3025	3025		
56	4	10	224	3136	12544		
58	1	11	58	3364	3364		
Summe	11		569		30279		
				/ 11	2752,63636		
MW:	51,73		Varianz	76,93			
			Stand.Abw.:	8,77			
Modus:	56						
			Quartil 1:	x3 = 51	n*q nicht ganzzahlig		2,75
Median:	x6 = 55		Quartil 3:	x9 = 56	n*q nicht ganzzahlig		8,25

Die Zeitangabe ist verkehrt; in 25 % der Tage braucht er mehr 56 Minuten oder mehr.

Aufgabe 2: Mittelwerte und Streumaße (klassiert)

Eine Umfrage unter 240 Schülern ergab folgende Verteilung des monatlichen Taschengeldes in €:

Klasse	$0 \leq x < 5$	$5 \leq x < 10$	$10 \leq x < 20$	$20 \leq x < 30$	$30 \leq x < 50$	$50 \leq x \leq 75$
rel. H.	10 %	15 %	25 %	30 %	15 %	??? %

- Füllen Sie die in der Anlage vorgegebene Häufigkeitstabelle aus.
- Ermitteln Sie das arithmetische Mittel.
- Berechnen Sie die Varianz und die Standardabweichung.
- Bestimmen Sie den Median, die beiden Quartilwerte und den Modus.

Anlage: Häufigkeitstabelle zur Aufgabe

Geldbetrag [€]	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit	Klassenmitte	Klassenbreite	Häufigkeitsdichte	kum. rel. Häufigkeit
Summe						

Lösung:								
Klasse	Häufigkeit	rel. Hfgk.	kum. rel. H.	KM	KB	HD	KM ²	KM ² *N
[0;5[	24	0,10	0,10	2,5	5	4,80	6,25	150
[5;10[	36	0,15	0,25	7,5	5	7,20	56,25	2025
[10;20[	60	0,25	0,50	15	10	6,00	225	13500
[20;30[	72	0,30	0,80	25	10	7,20	625	45000
[30;50[	36	0,15	0,95	40	20	1,80	1600	57600
[50;75]	12	0,05	1,00	62,5	25	0,48	3906,25	46875
	240	1			75			
	240							688,125
Mittelwert:	21,75		Gesamtausgabe:		5220			
Varianz:	215,06							
Stdabw.:	14,67							
Median	20							
Q1	10							
Q3	28,33							
mod. Klasse	[5;10[		mod. Klasse	[20;30[				
Modus 1:	7,5		Modus 2:	25				

Aufgabe 3: Gini-Koeffizient & Lorenzkurve

Kunigunde Asketia lädt 11 Freundinnen zu einem Damenabend ein. Es gilt acht Flaschen Prosecco, die man bei einer Verlosung gewonnen hat, zu „auf ihre Qualität zu prüfen“.

Pro Flasche kann Sie fünf Gläser ausschenken.

- ▶ 3 Freundinnen müssen fahren und trinken nichts vom Prosecco,
- ▶ 3 Freundinnen trinken jeweils 3 Gläser,
- ▶ 4 Freundinnen trinken jeweils 5 Gläser,
- ▶ 1 Freundin trinkt 8 Gläser und
- ▶ Pia übernimmt den Rest.

a) Wie viele Gläser trinkt Kunigunde?

b) Zeichnen Sie die Lorenzkurve

(x-Achse: Anteil Personen/ y-Achse: Anteil der Gläser Prosecco)

c) Berechnen Sie den Gini-Koeffizienten und den normierten Gini-Koeffizienten.

Lösung:

Stufe	Personen			Gläser			
	Personen	rel.	kum.	Gläser pP	Gläser pStufe	rel.	kum.
1	3	0,25	0,25	0	0	0	0
2	4	0,33	0,58	3	12	0,3	0,3
3	4	0,33	0,92	5	20	0,5	0,8
4	1	0,08	1,00	8	8	0,2	1
Summe	12	1			40	1	

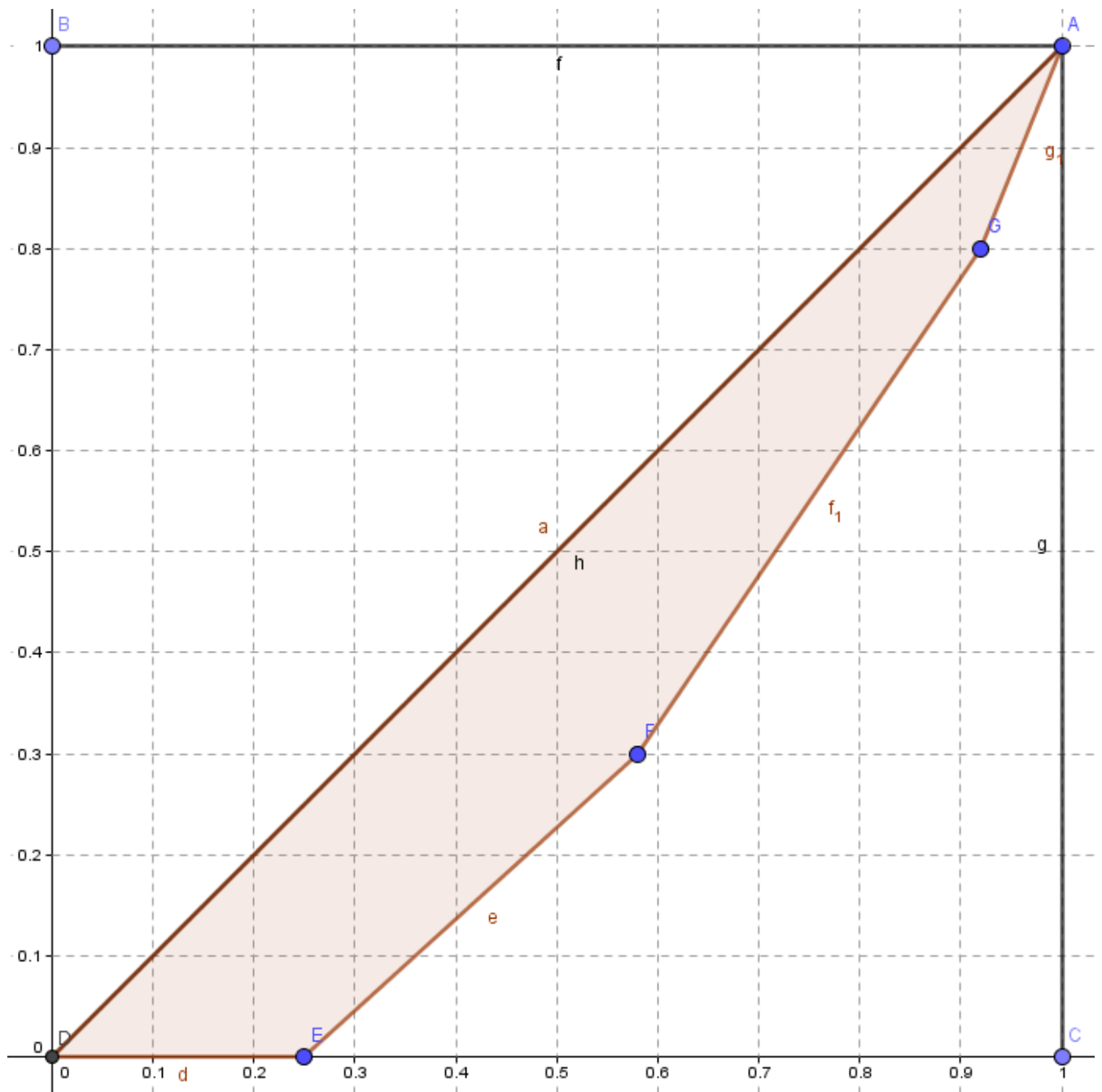
Kunigunde: 3 Gläser

Gini-Koeffizient:

GK = 0,38

Normierter Gini-Koeffizient:

norm. GK = $0,38 * 12/11 = 0,4145$



Aufgabe 4: Regression & Korrelation

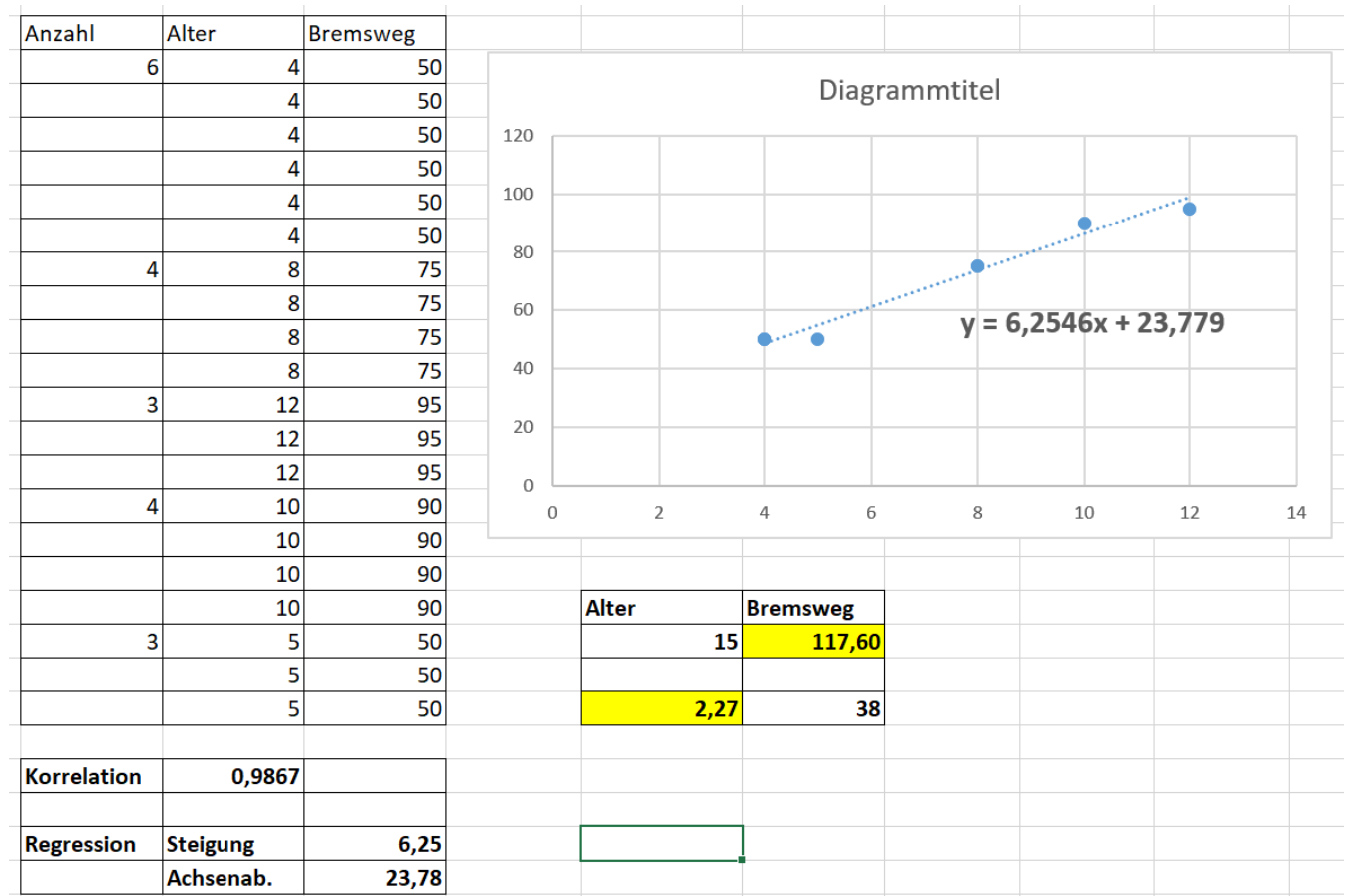
Bei 20 Gebrauchtwagen wurden die Bremswege bei einer Vollbremsung vom 100 km/h zum Stillstand geprüft bzw. getestet.

Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle dokumentiert:

Alter (Jahre)	4	8	12	10	5
Anzahl Pkw	6	4	3	4	???
Bremsweg (m)	50	75	95	90	50

- Bestimmen Sie die lineare Regressionsgerade und den zugehörigen Korrelationskoeffizienten und kommentieren Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich des Sachverhaltes.
- Bestimmen Sie den erwarteten Bremsweg bei Fahrzeugen der gleichen Kategorie mit einem Alter von 15 Jahren.
- Welches Fahrzeugalter kann man bei einem Bremsweg von 38 m erwarten?

Lösung:



d) Ordnen Sie die gegebenen Korrelationskoeffizienten den Schaubilder durch Ankreuzen korrekt zu.

	☐ 0.92 ☐ 0.36 ☐ 0.11 ☐ -0.73		☐ 0.92 ☐ 0.36 ☐ 0.11 ☐ -0.73
	☐ 0.92 ☐ 0.36 ☐ 0.11 ☐ -0.73		☐ 0.92 ☐ 0.36 ☐ 0.11 ☐ -0.73

 ☐ 0.92 ☒ 0.36 ☐ 0.11 ☐ -0.73	☒ 0.92 ☐ 0.36 ☐ 0.11 ☐ -0.73
 ☐ 0.92 ☐ 0.36 ☒ 0.11 ☐ -0.73	☐ 0.92 ☐ 0.36 ☐ 0.11 ☒ -0.73

Aufgabe 5: Warenkorbmethode und Preisindexberechnung

Für 5 Güter sind die Preise $p_{I,i}$ und $p_{II,i}$ und die Umsätze $u_{I,i}$ und $u_{II,i}$ in den Perioden I und II in nachfolgender Tabelle gegeben:

	Periode I			Periode II		
Nummer	Preis $p_{I,i}$		Umsatz $u_{I,i}$	Preis $p_{II,i}$		Umsatz $u_{II,i}$
1	5		50	6		48
2	4		200	6		240
3	10		80	9		144
4	8		48	10		40
5	3		30	3		24

- Bestimmen Sie die Preisindizes nach Laspeyres, Paasche und Fisher mit I als Basisperiode und II als Berichtsperiode.
- Ermitteln Sie die Inflationsrate auf der Basis des Preisindex nach Laspeyres, wenn I = 2020 und II = 2024 gilt.

Lösung:

	C	D	E	F	G	H	I
4		Periode I			Periode II		
5	Nummer	Preis I	Menge I	Umsatz I	Preis II	Menge II	Umsatz II
6	1	5	10	50	6	8	48
7	2	4	50	200	6	40	240
8	3	10	8	80	9	16	144
9	4	8	6	48	10	4	40
10	5	3	10	30	3	8	24
11	Summe:			408			496
12							
13							
14	Basisperiode I			Laspeyres:	1,2794		Inflation:
15	Berichtsperiode II			Paasche:	1,1923		
16				Fisher:	1,2351		

Berechnungen:

$$\text{Laspeyres: } L_p = \frac{\sum p_{1i} \cdot q_{0i}}{\sum p_{0i} \cdot q_{0i}}$$

$$\rightarrow \frac{\text{Ausgaben des Berichtsjahres mit Mengen des Basisjahres (Menge}_{\text{Periode I}} * \text{Preis}_{\text{Periode II}})}{\text{Ausgaben/Umsatz des Basisjahres (Menge}_{\text{Periode I}} * \text{Preis}_{\text{Periode I}})}$$

$$L_p = \frac{6 \cdot 10 + 6 \cdot 50 + 9 \cdot 8 + 10 \cdot 6 + 3 \cdot 10}{408} = \frac{522}{408} = 1,2794$$

$$\text{Paasche: } P_p = \frac{\sum p_{1i} \cdot q_{1i}}{\sum p_{0i} \cdot q_{1i}}$$

$$\rightarrow \frac{\text{Ausgaben/Umsatz des Berichtsjahres (Menge}_{\text{Periode II}} * \text{Preis}_{\text{Periode II}})}{\text{Ausgaben des Basisjahres mit Mengen des Berichtsjahres (Menge}_{\text{Periode II}} * \text{Preis}_{\text{Periode I}})}$$

$$P_p = \frac{496}{5 \cdot 8 + 4 \cdot 40 + 10 \cdot 16 + 8 \cdot 4 + 3 \cdot 8} = \frac{496}{416} = 1,1923$$

$$F_p = \sqrt{L_p \cdot P_p} \rightarrow \sqrt{1,2794 \cdot 1,1923} = 1,2351$$

$$\text{Inflationsrate: } \sqrt[4]{1,2794} = 1,0635 \rightarrow i_{\text{eff}} = 1,0635 - 1 = 0,0635 \xrightarrow{\cdot 100} 6,35\%$$

Aufgabe 6: Stochastik – Binomialverteilung – Flüssigdünger im Garten

Bei einem Produzenten für Flüssigdünger werden zur Qualitätskontrolle 50 Stichproben aus der laufenden Produktion einer Produktlinie mit neuem Wirkungsgrad, von denen 95 % ein positiven Wachstumsverlauf generieren sollen, zur Kontrolle entnommen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind unter den entnommenen Proben

- a) genau 45 mit hohem Wirkungsgrad?
- b) zwischen 2 bis 5 ohne entsprechend intensive Wirkung?
- c) höchstens 47 mit hohem Wirkungsgrad?

Lösung

$$B_{50;0,95}(X = 45) = \binom{50}{45} \cdot 0,95^{45} \cdot 0,05^5 = 0,0658$$

$$B_{50;0,05}(2 \leq Y \leq 5) = \sum_{Y=2}^5 \binom{50}{Y} \cdot 0,05^Y \cdot 0,95^{50-Y} = 0,6828$$

$$B_{50;0,95}(X \leq 47) = \sum_{X=0}^{47} \binom{50}{X} \cdot 0,95^X \cdot 0,05^{50-X} = 0,4595$$

Aufgabe 7: Stochastik – Normalverteilung - Parfümeriehandel

Bei der Befüllung von Zuckertüten durch eine Maschine ist das Gewicht normalverteilt mit Mittelwert 1000 g und Standardabweichung 6 g.

- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthalten die Zuckertüten weniger als 995 g?
- b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Inhalt einer Tüte 999 g wiegt?
- c) Produzent Geldreich möchte eine Garantie geben, so dass eine Tüte mit zu geringer Füllung umgetauscht werden kann.

Welche Mindestfüllmenge sollte er garantieren, wenn er, besonders kritische Kunden vorausgesetzt, höchstens ein Prozent an Reklamationen haben will?

$$P(X \leq 995) \stackrel{z = \frac{995-1.000}{6}}{=} \Phi\left(-\frac{5}{6}\right) \stackrel{z = -\frac{5}{6}}{=} 1 - \Phi\left(\frac{5}{6}\right) = 1 - 0,7967 = 0,2033$$

$$P(998 \leq X \leq 999) = \Phi\left(\frac{998-1.000}{6} = -\frac{1}{3}\right) - \Phi\left(\frac{999-1.000}{6} = -\frac{1}{6}\right) = (1-0,5675) - (1-0,6393) = 0,0718$$

$$P(X \leq k) = 0,01 \rightarrow z = \frac{k - \mu}{\sigma} \rightarrow -2,33 = \frac{k - 1.000}{6}$$

$$\rightarrow -2,33 = \frac{k - 1.000}{6} \rightarrow k = 986,02$$

Deshalb muss 1,0% unten berechnet werden.

In der Tabelle nach 0,0100 schauen und en z-Wert ablesen:

$$z = 2,33$$

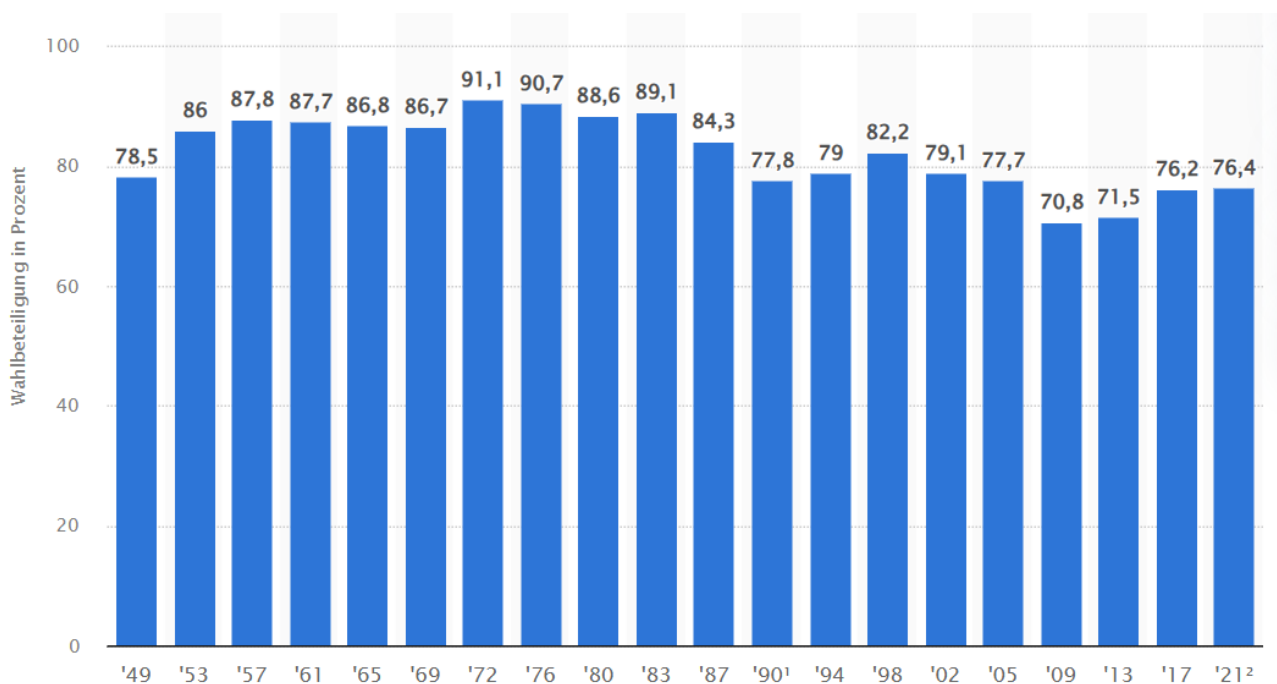
$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

$$x = \bar{x} - z \cdot s = 1000 - 2,33 \cdot 6 = 986,02g$$

Aufgabe 8: Zeitreihenanalyse

Bestimmen Sie die „saisonbereinigten“ Zahlen der Wahlbeteiligung der Bundestagswahlen von 1969 bis 2021 (=> Bitte verwenden Sie hierfür die **Anlage – Zeitreihenanalyse**.)

Führen Sie eine TERTIAL-Analyse durch!



Anlage zu Aufgabe 8: Zeitreihenanalyse

Jahr/ Tertial	Wahlbeteiligung [in %]	gleitender Durchschnitt	Differenz Tertial I	Differenz Tertial II	Differenz Tertial III	Saison- komponente	Saisonbereinigte Werte
1969 / I	86,7						
1972 / II	91,1						
1976 / III	90,7						
1980 / I	88,6						
1983 / II	89,1						
1987 / III	84,3						
1990 / I	77,8						
1994 / II	79,0						
1998 / III	82,2						
2002 / I	79,1						
2005 / II	77,7						
2009 / III	70,8						
2013 / I	71,5						
2017 / II	76,2						
2021 / III	76,4						
		Durchschnitt					

Jahr/Tertial	Wahlbeteiligung [in %]	gleitender Durchschnitt	Differenz Tertial I	Differenz Tertial II	Differenz Tertial III	Saisonkomponente	Saisonbereinigte Werte
1969 / I	86,7					-1,349	88,049
1972 / II	91,1	89,50		1,60		1,191	89,909
1976 / III	90,7	90,13			0,57	0,159	90,541
1980 / I	88,6	89,47	-0,87			-1,349	89,949
1983 / II	89,1	87,33		1,77		1,191	87,909
1987 / III	84,3	83,73			0,57	0,159	84,141
1990 / I	77,8	80,37	-2,57			-1,349	79,149
1994 / II	79	79,67		-0,67		1,191	77,809
1998 / III	82,2	80,10			2,10	0,159	82,041
2002 / I	79,1	79,67	-0,57			-1,349	80,449
2005 / II	77,7	75,87		1,83		1,191	76,509
2009 / III	70,8	73,33			-2,53	0,159	70,641
2013 / I	71,5	72,83	-1,33			-1,349	72,849
2017 / II	76,2	74,70		1,50		1,191	75,009
2021 / III	76,4					0,159	76,241
		Durchschnitt	-1,333	1,207	0,175		
		Kontrolle	0,048	Korrektur:	0,0161		
		Korrektur:					
		Durchschnitt (neu)	-1,349	1,191	0,159		

