

Klausur: Mathematik und Statistik

Lehrveranstaltung: Statistik

Fakultät für Wirtschaft

Studiengang: BWL-Öffentliche Wirtschaft

Datum: 26.06.2025

Studierende(r)
Matrikelnummer:

Dozent: Jürgen Meisel

Kurs: WOW A

Studienjahrgang: 2024

Semester: 2

Hilfsmittel:

**Wiss. TR (nicht programmierbar) /
Formelsammlung mit eigenen
Ergänzungen**

**Bearbeitungs- und
Auswahlzeit:**

75 Minuten

Bewertung:

Maximale Punktzahl: 60

Erreichte Punktzahl:

Datum, Unterschrift

Anmerkungen:

Von 8 gestellten Aufgaben müssen 5 ausgewählt und bearbeitet werden.

Aufgabennr.:	Thema / Bereich	maximale Punkte	erreichte Punkte	Bemerkungen
1	Mittelwerte & Streumaße (diskret)	12		
2	Mittelwerte & Streumaße (klassiert)	12		
3	Konzentration (Ginikoeff. & Lorenzkurve)	12		
4	Regression & Korrelation	12		
5	Preisindizes und Inflationsrate	12		
6	Stochastik: Verteilung (diskret)	12		
7	Stochastik: Verteilung (stetig)	12		
8	Fragen zu Mittelwetrten	12		
		5 aus 8		
Summe		60		

Hilfsmittel: Wiss. Taschenrechner + Formelsammlung mit eigenen Ergänzungen
Bearbeitungszeit: 60 Minuten **Auswahlzeit:** 15 Minuten

Aufgabe 1: Mittelwerte und Streumaße (diskret)

Dozent Rudi Hasenfuß unterrichtet an der Dualen Hochschule Mannheim im Schweiße seines Angesichts Mathematik und Statistik.

Er ist immer bemüht, realistische Beispiel in sein Programm zu integrieren.

Daher folgende Aufgabe zum Unternehmen „Feldwinkel SE“:

In der folgenden Tabelle sind die Fehlzeiten des Jahres 2024 der **50 Mitarbeiter** des Unternehmens dargestellt.

Fehlzeit in Tagen	0	3	5	9	12	18	21
Anzahl der MA	5	9	???	9	8	4	2

- Wie hoch ist die durchschnittliche Fehlzeit der MA im Unternehmen?
- Bestimmen Sie den Median und den Modus der Fehlzeit
- Berechnen Sie die Quartilwerte und die Standardabweichung.

Lösung:

	Tage	Anzahl	Produkt		quadr. Minuten	Produkt		
	0	5	0		0	0		
	3	9	27		9	81		
	5	13	65		25	325		
	9	9	81		81	729		
	12	8	96		144	1152		
	18	4	72		324	1296		
	21	2	42		441	882		
Summe		50	383			4465		
MW:	7,66			StdAbw	5,534	89,3		
					Wurzel Var.	58,6756	30,6244	Varianz
Median	5	1/2 * (x25+x26)		Quartil 1	x13 = 3	50 * 0,25	12,5	Pos. 13
				Quartil 3	x38 = 12	50 * 0,75	37,5	Pos. 38
Modus	5	häufigster Wert						

$$V(X) = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i)^2 \right] - \bar{x}^2$$

$$\Rightarrow S(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$\bar{x}_p = \begin{cases} x_{[n \cdot p] + 1} & \text{für } (n \cdot p) \text{ nicht ganzzahlig} \\ \frac{1}{2} (x_{n \cdot p} + x_{n \cdot p + 1}) & \text{für } (n \cdot p) \text{ ganzzahlig} \end{cases}$$

Die Personalabteilung hat vor kurzem festgestellt, dass ein Mitarbeiter in der Aufstellung vergessen wurde: Paul Schaffnix. Leider scheint der Name Programm zu sein – er hatte 2024 insgesamt 80 Fehlzeittage.

- d) Wie verändern sich die **drei oben errechneten Mittelwerte**, wenn man diesen Mitarbeiter nun miteinbezieht?

	Tage	Anzahl	Produkt		quadr. Minuten	Produkt			
	0	5	0		0	0			
	3	9	27		9	81			
	5	13	65		25	325			
	9	9	81		81	729			
	12	8	96		144	1152			
	18	4	72		324	1296			
	21	2	42		441	882			
	80	1	80		6400	6400			
Summe		51	463			10865			
MW:	9,07843137			StdAbw	11,429	213,039216	130,6213	Varianz	
					Wurzel Var.	82,4179162			
Median	5	x26		Quartil 1	x13 = 3	51 * 0,25	12,75	Pos. 13	
				Quartil 3	x38 = 12	51 * 0,75	38,25	Pos. 38	
Modus	5	häufigster Wert							

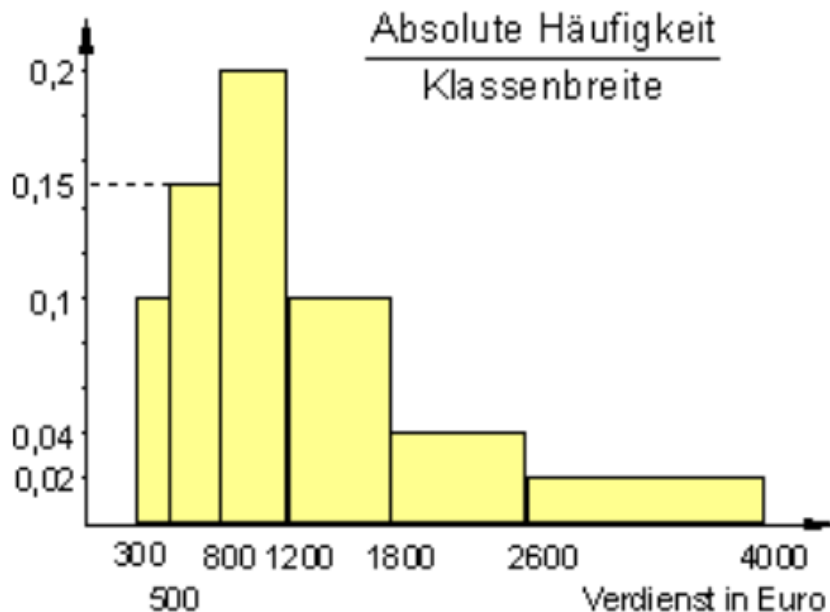
$$V(X) \stackrel{\text{Rechen}}{=} \stackrel{\text{formel}}{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i)^2 \right] - \bar{x}^2}$$

$$\Rightarrow S(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$\bar{x}_p = \begin{cases} x_{[n \cdot p] + 1} & \text{für } (n \cdot p) \text{ nicht ganzzahlig} \\ \frac{1}{2}(x_{n \cdot p} + x_{n \cdot p + 1}) & \text{für } (n \cdot p) \text{ ganzzahlig} \end{cases}$$

Aufgabe 2: Mittelwerte und Streumaße (klassiert)

Das Histogramm beschreibt die Verteilung der Beschäftigten des Industrieunternehmens Knackfred GmbH nach ihrem Monatsverdienst.



- Füllen Sie die in der Anlage vorgegebene Häufigkeitstabelle aus.
- Wie hoch ist der Durchschnittsverdienst eines Beschäftigten?
- Berechnen Sie die Varianz und die Standardabweichung.
- Bestimmen Sie den Median, die beiden Quartilwerte und den Modus.
- In der Führungsetage wird behauptet, dass die meisten Beschäftigten ohnehin mehr als 2.500 Euro verdienen. Nehmen Sie zu dieser Aussage kurz Stellung – indem Sie sich auf die obigen ermittelten Ergebnisse beziehen.

Anlage: Häufigkeitstabelle zur Aufgabe 2

Verdienst in [€]uro (Klasse)	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit	Klassenmitte	Klassenbreite	Häufigkeitsdichte	kum. rel. Häufigkeit
[300 ; 500[	20	20/265	400	200	0,1	20/265
[500 ; 800[	45	45/265	650	300	0,15	65/265
[800 ; 1200[	80	80/265	1000	400	0,2	145/265
[1200 ; 1800[	60	60/265	1500	600	0,1	205/265
[1800 ; 2600[	32	32/265	2200	800	0,04	237/265
[2600 ; 4000]	28	28/265	3300	1400	0,02	1
Summe	265	1	---	---	---	

Fahrzeit [Min]	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit	Klassenmitte	Klassenbreite	Häufigkeitsdichte	kum. rel. Häufigkeit	abs. H * KL.Mitte	quadrierte Klassenmitte	gewichtet
[300 ; 500[	20	0,075	400	200	0,1	0,0755	8000	160000	12075,4717
[500 ; 800[	45	0,170	650	300	0,15	0,2453	29250	422500	71745,283
[800 ; 1200[	80	0,302	1000	400	0,2	0,5472	80000	1000000	301886,792
[1200 ; 1800[	60	0,226	1500	600	0,1	0,7736	90000	2250000	509433,962
[1800 ; 2600[	32	0,121	2200	800	0,04	0,8943	70400	4840000	584452,83
[2600 ; 4000]	28	0,106	3300	1400	0,02	1,0000	92400	10890000	1150641,51
Summe	265	1					370050	289050	81000
					abs. Hkeit / Klassenbreite				
		370050						Summe:	2711235,85
MW	1396,42	1396,415094				$\bar{x}_M \Rightarrow \bar{x}_{0,5} = [a; b] \rightarrow \bar{x}_{0,5} = a + \frac{\Delta_i \cdot [0,5 - F(a)]}{p_i}$		quadrierter MW:	1949975,12
Median	1137,35	800 + 400*(0,5-0,2453)/0,302						Varianz:	761260,733
Modus	1000	[800 ; 1200[			Schritt 1: Modale Klasse bestimmen ⇒ Klasse mit max. Häufigkeitsdichte Schritt 2: ⇒ Wert der Klassenmitte der modalen Klasse			StdAbw:	872,50
Quartil 1	800 + 400*(0,25-0,2453)/0,302					$q_1 \Rightarrow \bar{x}_{0,25} = [a; b] \rightarrow \bar{x}_{0,25} = a + \frac{\Delta_i \cdot [0,25 - F(a)]}{p_i}$			
	806,23								
Quartil 3	1200 + 600*(0,75-0,5472)/0,226					$q_3 \Rightarrow \bar{x}_{0,75} = [a; b] \rightarrow \bar{x}_{0,75} = a + \frac{\Delta_i \cdot [0,75 - F(a)]}{p_i}$			
	1738,41								

e) offene Antwort – sollte aber die Aussage der Führungsetage widerlegen 😊

Aufgabe 3: Gini-Koeffizient & Lorenzkurve

Das Bankhaus **Knauserzins & Partner** ist bei Einlagenverzinsung seiner Kunden sehr defensivorientiert, wobei man bei Kreditzinsen eher großzügig für sich selbst agiert 😊
Im letzten halben Jahr wurden folgende Privatkredite gewährt:

Kredithöhe [1.000 €]	Anzahl der Kredite
0 – 2	100
2 – 6	300
6 – 10	400
10 – 20	200

- Vervollständigen Sie die Tabelle in der Anlage I.
- Zeichnen Sie die Lorenzkurve
⇒ Sie können hierfür gerne die Anlage II verwenden.
- Berechnen Sie den Ginikoeffizient.
- Beurteilen Sie die Konzentrationslage bei der Kreditgewährung.

Antwort: leichte mäßige Konzentration

	x-Achse: Anteil Personen/Kredite			y-Achse: Anteil Kreditvolumen		
Kredithöhe (Klasse)	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit	kum. rel. Häufigkeit	abs. Kreditvolumen	relatives. Kreditvolumen	kum. rel. Kreditvolumen
1	100	0,1	0,1	100	0,013	0,013
2	300	0,3	0,4	1200	0,160	0,173
3	400	0,4	0,8	3200	0,427	0,600
4	200	0,2	1	3000	0,400	1,000
Summe	1000	1	---	7500	1,000	

Anzahl der Kredite

100
300
400
200

Klassenmitten verwenden

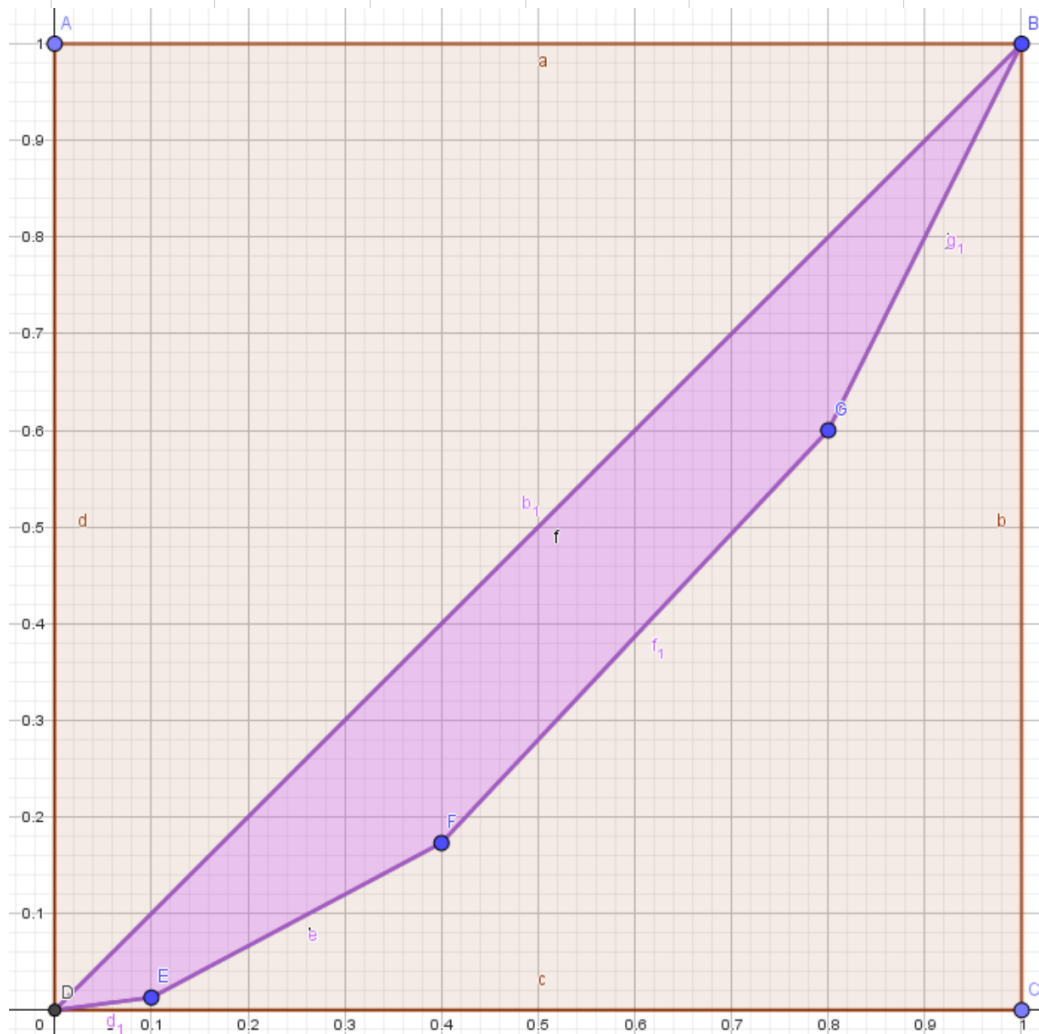
Kredithöhe [1.000 €]

0 – 2
2 – 6
6 – 10
10 – 20

max. KF:	0,5000
Fläche 1:	0,0007
Fläche 2:	0,0280
Fläche 3:	0,1547
Fläche 4:	0,1600
Fl. u. LK:	0,3433

GK: 0,3133

norm. GK: 0,3136 GK * n/(n-1)



Aufgabe 4: Regression & Korrelation

Für die Bestimmung des Geschäftsklimaindex spielt die Zuversicht der Unternehmen über die wirtschaftliche Zukunft eine Rolle. In der folgenden Tabelle ist die Erhebung dieser Zuversicht für 10 Unternehmen zu zwei verschiedenen Zeitpunkten dargestellt. Dabei konnte die Zuversicht auf einer Skala von 0 (= ganz pessimistisch) bis 100 (= sehr optimistisch) angegeben werden.

Beobachtung	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Zuversicht Zeitpunkt 1	48	65	56	59	44	60	55	50	52	
Zuversicht Zeitpunkt 2	33	40	46	49	32	36	42	39	44	

Anmerkung:

- (i) Geben Sie bei den Teilaufgaben a) und b) die notwendigen Formeln an;
- (ii) Sie können zudem die hier bereits berechneten Hilfsgrößen bei Ihrer eigenen

Ermittlung der Lösungen verwenden – wenn Sie wollen 😊

$$\sum_{i=1}^{10} \text{Zeit1}_i = 535 \quad \sum_{i=1}^{10} \text{Zeit2}_i = 409 \quad \sum_{i=1}^{10} (\text{Zeit1}_i \cdot \text{Zeit2}_i) = 22.143 \quad \sigma^2_{\text{Zeit1}} = 40,45 \quad \sigma^2_{\text{Zeit2}} = 32,29$$

a) Berechnen Sie Korrelation nach Pearson und die Kovarianz und ...

- oh je, leider ist etwas Kaffee drübergegangen 😊

b) Berechnen Sie auch die lineare Regressionsfunktion.

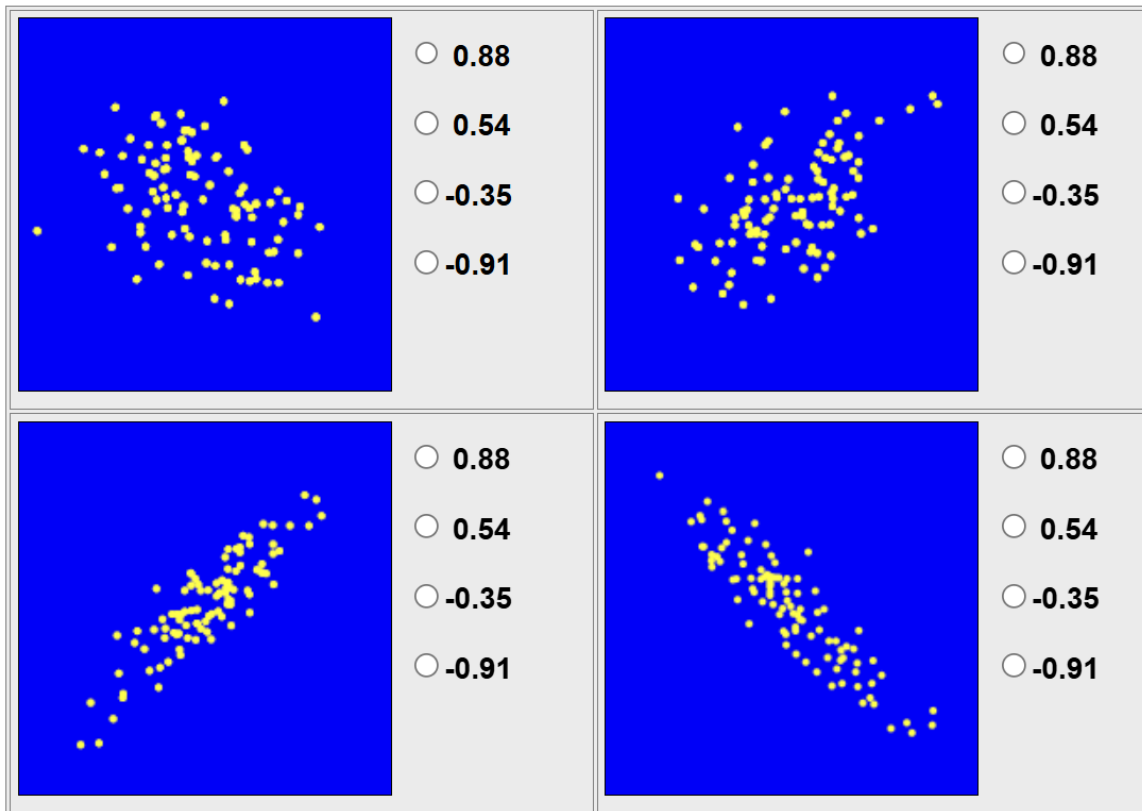
Beobacht.	Zeitp. 1	Zeitp.2	x*x	y*y	x*y
Summe:	535	409	29027	17051	22143
MW	53,5	40,9	2902,7	1705,1	2214,3
Varianz			StdAbw		
Zeit 1	40,45		Zeit 1	6,360	
Zeit 2	32,29		Zeit 2	5,682	
Korrel	0,7235664				
Steigung	0,6464771			y = 0,646x + 6,313	
Achsenabschnitt	6,3134734				

Die Lösungen können entweder durch Ergänzung der beiden „fehlenden“ Werte erzeugt werden oder Sie wenden die berechneten Hilfsgrößen und die zugrundeliegenden Formeln an – Wie hier bei der Kovarianz demonstriert:

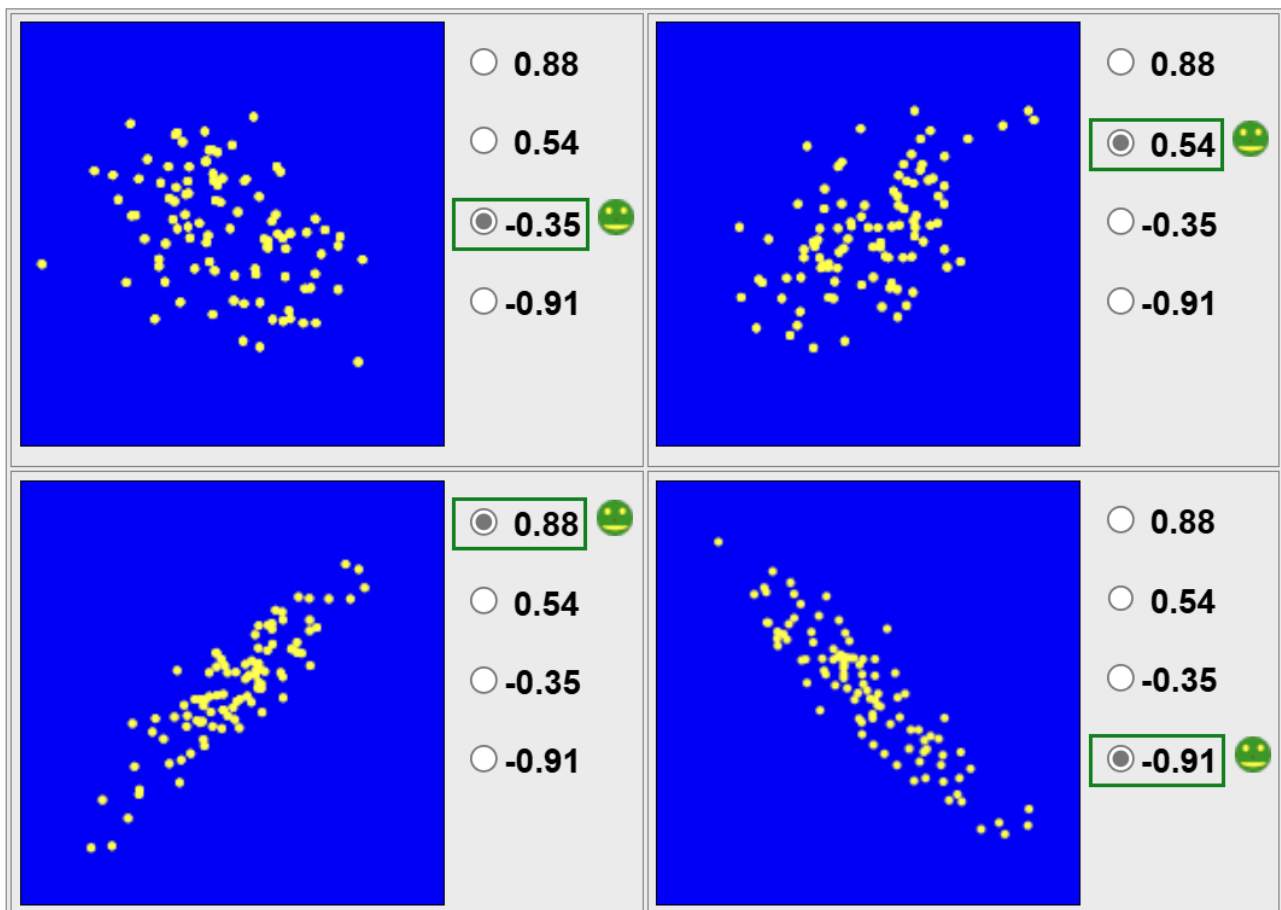
$$\text{Kovarianz}(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_i) - \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$\text{Kov}(X, Y) = \frac{1}{10} \cdot 22.143 - 53,5 \cdot 40,9 = 26,15$$

c) Ordnen Sie den Streudiagrammen durch Ankreuzen der vorgeschlagenen Werte (rechts) den korrekten Korrelationskoeffizienten zu.



Quelle: <https://istics.net/Correlations/>



Aufgabe 5: Warenkorbmethode und Preisindexberechnung

Ein Unternehmen hat eine Preis-Mengen-Übersicht für die bezogenen Güter A, B und C angefertigt.

Gut	Preise		Mengen	
	2020	2024	2020	2024
A	8	12	50	45
B	26	24	30	60
C	32	44	70	90
D	14	24	100	110

- Ermitteln Sie hierzu die Preisindizes nach Laspeyres und Paasche.
- Berechnen Sie den Preisindex nach Fisher.
- Wie hoch ist die jährliche Inflationsrate auf der Grundlage der Daten nach Laspeyres?

$$\text{Laspeyres: } L_p = \frac{\sum p_{224} \cdot q_{20i}}{\sum p_{20i} \cdot q_{20i}}$$

→ $\frac{\text{Ausgaben des Berichtsjahres mit Mengen des Basisjahres (Menge}_{\text{Periode I}} \cdot \text{Preis}_{\text{Periode II}})}{\text{Ausgaben/Umsatz des Basisjahres (Menge}_{\text{Periode I}} \cdot \text{Preis}_{\text{Periode I}})}$

$$L_p = \frac{12 \cdot 50 + 24 \cdot 30 + 44 \cdot 70 + 24 \cdot 100}{8 \cdot 50 + 26 \cdot 30 + 32 \cdot 70 + 14 \cdot 100} = \frac{6800}{4820} = 1,4108$$

$$\text{Paasche: } P_p = \frac{\sum p_{24i} \cdot q_{24i}}{\sum p_{20i} \cdot q_{24i}}$$

→ $\frac{\text{Ausgaben/Umsatz des Berichtsjahres (Menge}_{\text{Periode II}} \cdot \text{Preis}_{\text{Periode II}})}{\text{Ausgaben des Basisjahres mit Mengen des Berichtsjahres (Menge}_{\text{Periode II}} \cdot \text{Preis}_{\text{Periode I}})}$

$$P_p = \frac{12 \cdot 45 + 24 \cdot 60 + 44 \cdot 90 + 24 \cdot 110}{8 \cdot 45 + 26 \cdot 60 + 32 \cdot 90 + 14 \cdot 110} = \frac{8580}{6340} = 1,3533$$

$$F_p = \sqrt{L_p \cdot P_p} \rightarrow \sqrt{1,4108 \cdot 1,3533} = 1,38175$$

$$\text{Inflationsrate: } \sqrt[4]{1,4108} = 1,0898 \rightarrow i_{\text{eff}} = 1,0898 - 1 = 0,0898 \xrightarrow{\cdot 100} 8,98 [\%]$$

Aufgabe 6: Stochastik – Binomialverteilung – Münzwesen im Mittelalter

Im Mittelalter wurden Kupfermünzen als Zahlungsmittel verwendet.

Von der Gesamtmenge war 5 % Falschgeld im Umlauf; falsche Münzen konnte man zwar wegen des minderwertigen Materials verbiegen, allerdings waren sie von echten Münzen aber nicht zu unterscheiden.

Der Schatzmeister Laurentius Aureus Kupfernagel bewahrte die Münzen in Kästen zu je 100 Stück auf.

Manchmal wird er von Alpträumen geplagt, da er Angst hat, dass ihm zu viele Falschmünzen untergejubelt wurden.

Daher interessieren ihn folgende Fragestellungen und Wahrscheinlichkeiten:

- Wie hoch sind der (stochastische) Erwartungswert und die Standardabweichung für einen Münzkasten (100 Münzen)?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einem Kasten höchstens 4 falsche Münzen befinden?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Kasten mind. 2 und höchstens 6 falsche Münzen befinden?

Laurentius Aureus Kupfernagel hat insgesamt 20 Kästen mit je 100 Münzen in seiner Schatzkammer. Die Wahrscheinlichkeit für **fünf Falschmünzen** in einem Kasten liegt bei **p = 0,18**.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in mind. 6 Kästen je fünf Falschmünzen befinden?

Lösungen:

$$\mu = n \cdot p \qquad \sigma = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

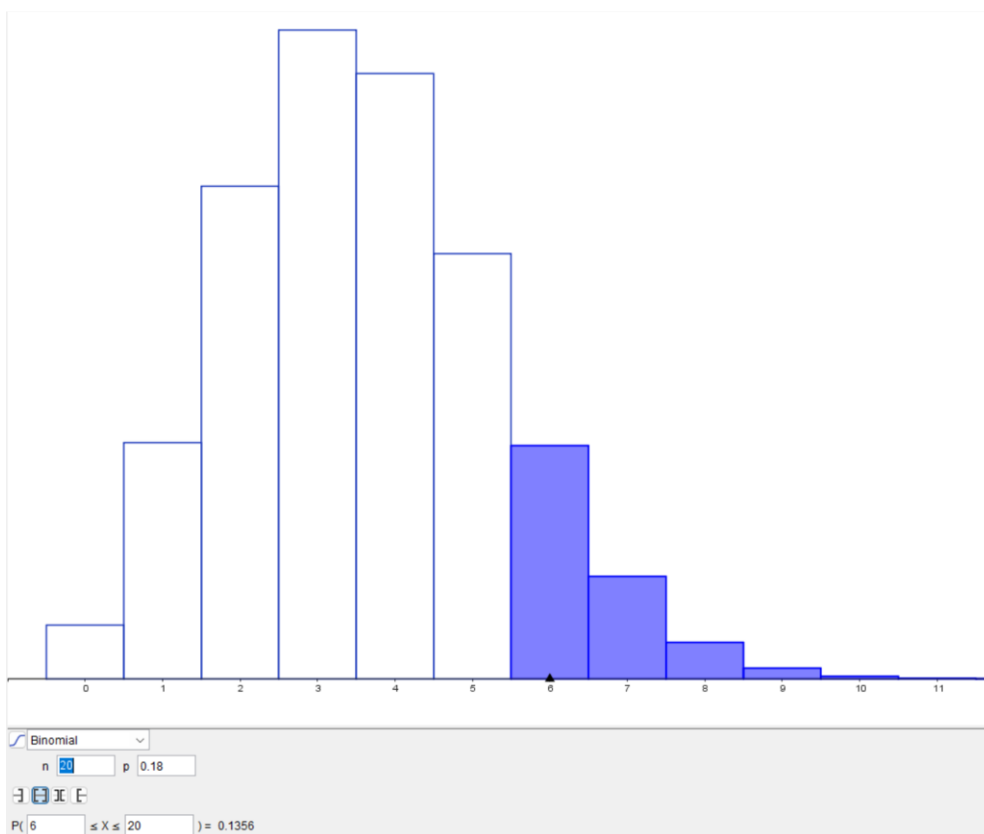
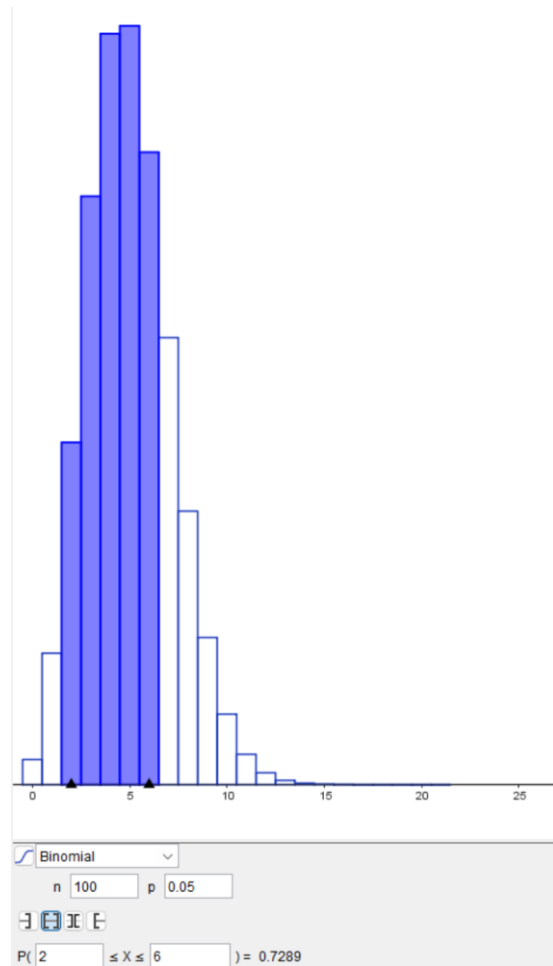
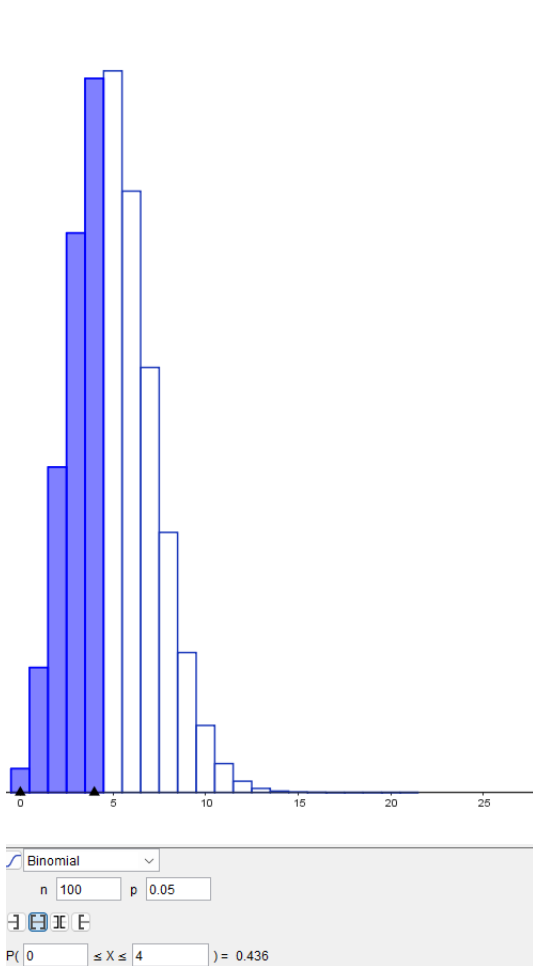
$$\mu = 100 \cdot 0,05 = 5 [\text{Falschmünzen}]$$

$$\sigma = \sqrt{100 \cdot 0,05 \cdot 0,95} = 2,18$$

$$B_{100;0,05}(X \leq 4) = \sum_{x=0}^4 \binom{100}{x} \cdot 0,05^x \cdot 0,95^{100-x} = 0,436$$

$$B_{100;0,05}(2 \leq X \leq 6) = \sum_{x=2}^6 \binom{100}{x} \cdot 0,05^x \cdot 0,95^{100-x} = 0,7289$$

$$B_{20;0,18}(Y \geq 6) = \sum_{x=6}^{20} \binom{20}{x} \cdot 0,18^x \cdot 0,82^{20-x} = 0,1356$$



Aufgabe 7: Stochastik – Normalverteilung – Leuchtstoffröhren

Die Brenndauer von Leuchtstoffröhren [in Stunden] wird als normalverteilt angenommen; dabei besitzen die Parameter μ und σ folgende Werte:

$$\mu = 900 \text{ [h]} \quad \sigma = 100 \text{ [h]}$$

- a) Erläutern Sie die Bedeutung der Parameter μ und σ im Sachzusammenhang und geben Sie das 2σ -Intervall an.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit brennt eine Leuchtstoffröhre auf Basis der obigen Parameter

- b) weniger als 650 Stunden?
c) länger als 1200 Stunden?
d) zwischen 750 und 1050 Stunden?
e) Wie lange muss eine Leuchtstoffröhre - auf Basis der obigen Parameter - brennen, um zu den 20 % leistungsstärksten zu gehören?

Lösungen:

Im Durchschnitt brennt jede Leuchtstoffröhre ca. 900 Stunden; die Standardabweichung beträgt 100 Stunden, so dass ca. 67 % der Leuchtstoffröhren eine Brenndauer von 800 bis 1000 Stunden aufweisen.

$$2\sigma - \text{Intervall: } [\mu \pm 2\sigma] = [900 \pm 2 \cdot 100] = [700; 1100] \text{ Stunden Brenndauer}$$

$$P(X < 650) = \Phi\left(\frac{650 - 900}{100}\right) = \Phi(-2,5) = 1 - \Phi(2,5) = 1 - 0,9938 = 0,0062$$

$$P(X > 1200) = 1 - \Phi\left(\frac{1200 - 900}{100}\right) = 1 - \Phi(3) = 1 - 0,9987 = 0,0013$$

$$P(750 \leq X \leq 1050) \stackrel{\text{Symmetrie}}{=} 2\Phi\left(\frac{1050 - 900}{100}\right) - 1 = 2\Phi(1,5) - 1 = 0,8664$$

$$\begin{aligned} P(X \geq k) &\geq 0,2 \rightarrow 1 - P(X < k) \geq 0,2 \rightarrow P(X < k) < 0,8 \\ &\rightarrow 0,84 \leq \frac{k - 900}{100} \rightarrow k \geq 984 [\text{Stunden}] \end{aligned}$$

Aufgabe 8: Fragen zu Mittelwerten

Beantworten Sie die Fragen durch Nennen der korrekten Lösung - Begründungen sind nur anzugeben, wenn gewünscht.

- a) Welcher der drei Mittelwerte arithmetisches Mittel, Median und Modalwert wird von Ausreißern am stärksten beeinflusst?
⇒ **Nennen Sie diesen.**

Arithmetischer Mittelwert

- b) Die Ermittlung der drei Mittelwerte arithmetisches Mittel, Median und Modalwert setzen in jedem Fall quantitative Merkmale voraus.
⇒ **Ist diese Aussage korrekt?**

NEIN

- c) Der Median bleibt auch dann unverändert, wenn Werte außerhalb des 2-σ-Intervalls aus der Stichprobe entfernt werden.
⇒ **Entscheidung mit Begründung.**

NEIN, da die Anzahl der Werte der Grundgesamtheit den Umfang der Werte verändert, beeinflusst dies natürlich auch die Anzahl der Positionen

- d) Der Median bleibt in jedem Fall unverändert, wenn der größte/höchste Wert der Stichprobe verdoppelt wird.
⇒ **Entscheidung mit Begründung.**

JA, da die Veränderung keinen Einfluss auf die zentrale Position hat, von welcher der Median ermittelt wird – zudem ist der Charakter „unabhängig gegen Ausreißer“ das wesentliche Kriterium

- e) Wie verändern sich (i) arithmetischer Mittelwert und (ii) Median, wenn zu jedem Wert der Stichprobe die konstante Zahl $c = 4$ hinzugefügt wird?
⇒ **Antworten mit Begründung.**
(i) arithmetischer Mittelwert

$$\text{Es gilt: } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i + c) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c = \bar{x} + \frac{1}{n} c \cdot n = \bar{x} + c$$

(ii) Median

$$\overline{x_M} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x_{n+1}}{2} & \text{für n ungerade} \\ \frac{1}{2} \left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1} \right) & \text{für n gerade} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \frac{(x+c)_{n+1}}{2} & \text{für n ungerade} \\ \frac{1}{2} \left((x+c)_{\frac{n}{2}} + (x+c)_{\frac{n}{2}+1} \right) & \text{für n gerade} \end{array} \right\} = \overline{(x_M + c)}$$

Ergebnis:

In beiden Fällen erhöht sich der Mittelwert um c Einheiten.