Klausur: Statistik am Montag, den 26. Januar 2009

Jürgen Meisel
FH Ludwigshafen

Zugelassene Hilfsmittel: Nicht progr. Taschenrechner
Bearbeitungszeit: **120 Minuten**

Aufgabe 1: Mittelwerte, Streuungsmaße und graphische Darstellungsformen

Für die 20 landwirtschaftlichen Betriebe in einer Gemeinde liegen folgende Daten vor:

Betriebsfläche (in ha)	50	100	30	200	20
Anzahl der Betriebe	7	2	5	1	5

a) Bestimmen Sie arithmetisches Mittel, Median und Modalwert der Betriebsfläche eines Betriebs.

Lösung:

Ordnen nach der Größe:

Betriebsfläche (in ha)	20	30	50	100	200
Anzahl der Betriebe	5	5	7	2	1

$$\mu_{arith.} = \frac{20\cdot 5+30\cdot 5+50\cdot 7+100\cdot 2+200\cdot 1}{5+5+7+2+1} = \frac{1.000}{20} = 50$$

$$\bar{x}_{Median} = \frac{1}{2}\left(x_{10}+x_{11}\right) = \frac{30+50}{2} = 40$$

Modalwert: $\bar{x}_{Modal} = 50$

b) Berechnen Sie die Standardabweichung und die 1. und 3. Quartile.

Lösung: Varianz und Standardabweichung:

$$\sigma^2 = \frac{(20-50)^2\cdot 5+(30-50)^2\cdot 5+(50-50)^2\cdot 7+(100-50)^2\cdot 2+(200-50)^2\cdot 1}{5+5+7+2+1}$$

$$\sigma^2 = \frac{900\cdot 5+400\cdot 5+0\cdot 7+2.500\cdot 2+22.500\cdot 1}{20} = \frac{34.000}{20} = 1.700$$

$$\sigma = \sqrt{1.700} = 41{,}23$$

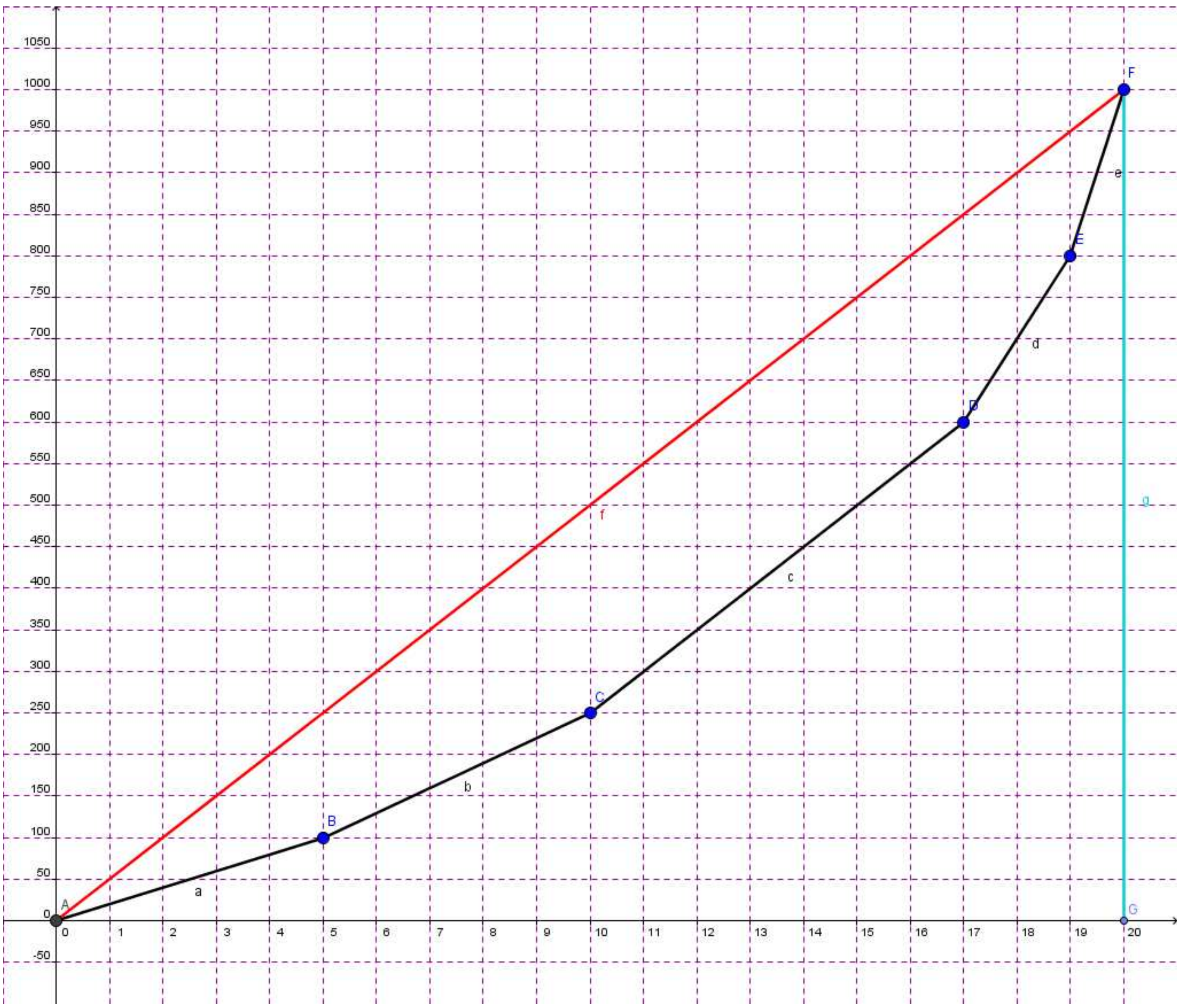
Quartil 1: $\overline{x_{0,25}} = \frac{1}{2}\left(x_{20\cdot 0,25} + x_{20\cdot 0,25+1}\right) = \frac{1}{2}\left(x_5 + x_6\right) = \frac{1}{2}(20+30) = 25$

Quartil 3: $\overline{x_{0,75}} = \frac{1}{2}\left(x_{20\cdot 0,75} + x_{20\cdot 0,75+1}\right) = \frac{1}{2}\left(x_{15} + x_{16}\right) = \frac{1}{2}(50+50) = 50$

c) Zeichnen Sie die Lorenzkurve.

Lösung:

Betriebsfläche (in ha)	20	30	50	100	200
Summe Betriebsfläche	100	250	600	800	1.000
Anzahl der Betriebe	5	5	7	2	1
Summe Anzahl Betriebe	5	10	17	19	20



Aufgabe 2: Preisindizes

Die Ausgaben für das Wohnen eines Haushalts verteilen sich in der **Basisperiode** auf die drei Positionen "Kaltmiete", "Strom" und "Heizöl" im Verhältnis 6:2:2.

Die Nettomiete steigt bis zur **Berichtsperiode** um 10%, der Heizölpreis um 30%, der Preis für Strom bleibt gleich.

a) Wie hoch ist der durchschnittliche Preisanstieg für das Wohnen, gemessen durch die Indexformel nach Laspeyres?

<u>Lösung:</u> $$L_P = \frac{\sum p_{1i} \cdot q_{0i}}{\sum p_{0i} \cdot q_{0i}} = \frac{6 \cdot 1{,}1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1{,}3}{10} = 1{,}12 \Rightarrow 12[\%]$$

b) Wie stark müsste der Strompreis sinken, damit sich bei sonst gleichen Bedingungen ein durchschnittlicher Preisanstieg von 0% ergibt?

<u>Lösung:</u>

$$1 = \frac{9{,}2 + 2 \cdot x}{10} \Rightarrow x = 0{,}4 \Rightarrow \text{Senkung der Stromkosten um 60 \%}$$

Angenommen, in der **Berichtsperiode** ändert sich das Verhältnis der Ausgabenpositionen auf 6:3:1.

c) Wie hoch ist dann der durchschnittliche Preisanstieg für das Wohnen, gemessen durch die Indexformel von Paasche?

<u>Lösung:</u> $$P_P = \frac{\sum p_{1i} \cdot q_{1i}}{\sum p_{0i} \cdot q_{1i}} = \frac{6 \cdot 1{,}1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1{,}3}{10} = 1{,}09 \Rightarrow 9[\%]$$

Aufgabe 3: Trendfunktionen – Lineare Regression und Korrelation

In einem bestimmten Bereich hängt der Ernteertrag eines landwirtschaftlichen Gutes von der Menge eines eingesetzten Düngemittels je Hektar ab.
Auf 6 Versuchsfeldern wird der Düngemitteleinsatz getestet.
Dabei wurden die folgenden Erträge je Hektar erzielt:

Versuchsfeld	1	2	3	4	5	6
Düngemitteleinsatz [100 kg]	4	2	6	1	5	3
Ernteertrag [t]	25	15	25	10	30	26

a) Stellen Sie den Ernteertrag in Abhängigkeit von dem Düngemitteleinsatz durch eine Funktion $y = b_0 + b_1 x$ dar.

Lösung:

Feld i	1	2	3	4	5	6	Σ
Dünger x_i	4	2	6	1	5	3	**21**
Ernte y_i	25	15	25	10	30	26	**131**
$x_i \cdot y_i$	**100**	**30**	**150**	**10**	**150**	**78**	**518**
$(x_i)^2$	**16**	**4**	**36**	**1**	**25**	**9**	**91**
$(y_i)^2$	**625**	**225**	**625**	**100**	**900**	**676**	**3.151**

$$\mu_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{21}{6} = 3,5 \qquad \mu_y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{131}{6} = 21,83$$

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) - n\cdot\mu_x\cdot\mu_y}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2\right) - n\cdot\mu_x^2} = \frac{518 - 6\cdot 3,5\cdot\frac{131}{6}}{91 - 6\cdot 3,5^2} = \frac{59,5}{17,5} = 3,4$$

$$b_0 = \mu_y - b_1\cdot\mu_x = \frac{131}{6} - 3,4\cdot 3,5 = 9,93$$

Lineare Regression: $y = 3,4x + 9,93$

b) Ermitteln Sie den Korrelationskoeffizienten und beurteilen Sie Ihr Ergebnis.

Lösung:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) - n\cdot\mu_x\cdot\mu_y}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2\right) - n\cdot\mu_x^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i^2\right) - n\cdot\mu_y^2}}$$

$$r = \frac{518 - 6 \cdot 3{,}5 \cdot \frac{131}{6}}{\sqrt{91 - 6 \cdot 3{,}5^2} \cdot \sqrt{3.151 - 6 \cdot \left(\frac{131}{6}\right)^2}} = \frac{59{,}5}{\sqrt{17{,}5} \cdot \sqrt{290{,}83}} = 0{,}834$$

Da der Korrelationswert nahe bei 1 liegt, kann man von einer positiven Korrelation sprechen. Der Düngemitteleinsatz scheint den Ernteertrag zu steigern.

Aufgabe 4: Erwartungswert

In einem ZE gebe die Zufallsvariable X die Anzahl der Treffer an.
Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X gilt:

k	0	1	2	3	4	sonst
P (X = k)	0,1 a	a^2 - 0,8	0,25 a	0,15 a	0,3	0

a) Bestimmen Sie a so, dass eine Wahrscheinlichkeitsverteilung vorliegt.

Lösung: Bedingung: $\sum_{k=0}^{4} P(X=k) = 1$

$$\sum_{k=0}^{4} P(X=k) = a^2 + 0{,}5a - 0{,}5 = 1 \Rightarrow a^2 + 0{,}5a - 1{,}5 = 0$$

$$\Rightarrow a_{1/2} = \frac{-0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25+6}}{2} \Rightarrow a_1 = 1 \wedge a_2 = -1{,}5 \Rightarrow L = \{1\}$$

b) Wie groß ist das arithmetische Mittel μ_k der Verteilung?

Lösung:

$$\mu = 0 \cdot 0{,}1a + 1 \cdot \left(a^2 - 0{,}8\right) + 2 \cdot 0{,}25a + 3 \cdot 0{,}15a + 4 \cdot 0{,}3$$

$$\mu = a^2 + 0{,}95a + 0{,}4 \xrightarrow{a=1} \mu = 2{,}35$$

Aufgabe 5: stochastische Unabhängigkeit; Vierfeldertafel

Unter den 612 Abgeordneten des 16. deutschen Bundestages sind 197 Frauen.
Unter den 222 SPD-Abgeordneten sind 79 Frauen.

a) Erstellen Sie eine vollständige Vierfeldertafel.

Lösung:

absolut	SPD	andere	Σ
Frau	79	118	197
Mann	143	272	415
Σ	222	390	612

absolut	SPD	andere	Σ
Frau	0,13	0,19	0,32
Mann	0,23	0,45	0,68
Σ	0,36	0,64	1,00

b) Sind die folgenden Ereignisse stochastisch unabhängig?
A: "Ein zufällig ausgewählter Abgeordneter gehört zur SPD."
B: "Ein zufällig ausgewählter Abgeordneter ist weiblichen Geschlechts."

Lösung:

$$\text{Vor. für stoch. Unabhängigkeit:} \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap B) = 0{,}13 \quad und \quad P(A) \cdot P(B) = 0{,}36 \cdot 0{,}32 = 0{,}1152$$

=> Die beiden Ereignisse sind nicht stochastisch unabhängig bzw. sind stochastisch abhängig

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewählter Abgeordneter weder weiblich noch Mitglied der SPD?

Lösung: $P(\text{"}Mann\text{"} \cap \text{"}andere\text{"}) = 0{,}45$

Aufgabe 6

Es wird mit zwei Würfeln geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Augenzahlen höchstens 6 beträgt?

Lösung: 15 günstige von 36 möglichen Fällen: $P(X \leq 6) = \frac{15}{36} = 0{,}417$

Aufgabe 7 Hypergeometrische Verteilung

In einem Restaurant befinden sich 30 Gäste, 10 männliche und 20 weibliche.
6 Gäste werden zufällig ausgewählt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter diesen höchstens zwei männliche befinden?

Lösung:

$$H(X \leq 2) = H(X=0) + H(X=1) + H(X=2)$$

$$H(X \leq 2) = \frac{\binom{10}{0}\binom{20}{6}}{\binom{30}{6}} + \frac{\binom{10}{1}\binom{20}{5}}{\binom{30}{6}} + \frac{\binom{10}{2}\binom{20}{4}}{\binom{30}{6}} = 0{,}065 + 0{,}261 + 0{,}367 = 0{,}693$$

Aufgabe 8 Binomialverteilung

Eine Gruppe von 5 Personen soll mit einem Test auf ihr Kaufverhalten untersucht werden.
Aus vorhergehenden Untersuchungen ist bekannt, dass etwa 30 % aller Kunden der Verführung zum Kauf unterliegen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den betrachteten Personen

a) keine b) mindestens eine c) alle

das angepriesene Produkt kaufen.

Lösung:

$$a) \quad B(X=0) = \binom{5}{0} 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^5 = 0{,}168$$

$$b) \quad B(X \geq 1) = 1 - B(X=0) = 1 - 0{,}168 = 0{,}832$$

$$c) \quad B(X=5) = \binom{5}{5} 0{,}3^5 \cdot 0{,}7^0 = 0{,}00243$$

Aufgabe 9 Poissonverteilung

Bei einer automatischen Produktion von Erzeugnissen entsprechen 97,5 % aller Teile der Norm.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, unter 100 Teilen höchstens eines zu haben, das der Norm nicht entspricht ?

Lösung:

$$P(X=k) \quad = \quad \frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu} \quad mit \quad \mu = n \cdot p$$

$$P(X \le 1) \quad = \quad P(X=0) + P(X=1) \quad mit \quad \mu = 100 \cdot 0{,}025 = 2{,}5$$

$$P(X \le 1) \quad = \quad \frac{2{,}5^0}{0!}e^{-2{,}5} + \frac{2{,}5^1}{1!}e^{-2{,}5} \quad = \quad (1+2{,}5)e^{-2{,}5} \quad = \quad 0{,}287$$

Aufgabe 10 Totale Wahrscheinlichkeit und Bayes

Drei automatische Anlagen produzieren elektronische Bauelemente nach diesen Daten:

Anlage	produzierte Menge [Stck.]	davon Ausschuss [%]
1	20.000	1,4
2	30.000	2,3
3	50.000	4,0

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein aus der Gesamtmenge stammendes Bauelement Ausschuss ist?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein defektes Bauelement von der Anlage 3 stammt?

Lösung:

$$a) \quad P(\text{"}[A]usschuss\text{"}) \quad = \quad P_{Aus}(A_1) + P_{Aus}(A_2) + P_{Aus}(A_3)$$

$$P(\text{"}[A]usschuss\text{"}) \quad = \quad 0{,}2 \cdot 0{,}014 + 0{,}3 \cdot 0{,}023 + 0{,}5 \cdot 0{,}04 \quad = \quad 0{,}0297$$

$$b) \quad P_{Aus[3]}(A_3) \quad = \quad \frac{P_{Aus}(A_3)}{P(\text{"}Aus\text{"})} \quad = \quad \frac{0{,}5 \cdot 0{,}04}{0{,}0297} \quad = \quad 0{,}6734$$

Aufgabe 11 Binomialverteilung

Bei einem Qualitätstest werden unter gleichen Bedingungen unabhängig voneinander zufällige Stichproben durchgeführt. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Stichprobe ein normgerechtes Produkt liefert, sei 0,95.

Wie viele Stichproben müssen durchgeführt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens ein **nicht**normgerechtes Produkt gefunden wird?

Lösung:

$$B(X \geq 1) \quad = \quad 1 - B(X = 0) \quad = \quad 1 - \binom{n}{0} 0,05^0 \cdot 0,95^n \quad \geq \quad 0,99$$

$$\Rightarrow \quad 0,95^n \quad \leq \quad 0,01$$

$$\xrightarrow{\ln} \quad n \cdot \ln(0,95) \quad \leq \quad \ln(0,01)$$

$$\xrightarrow{:\ln(0,05)} \quad n \quad \geq \quad \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,95)} \quad = \quad 89,78 \quad \approx \quad 90$$

Aufgabe 12 Standardnormalverteilung mit Stetigkeitskorrektur

Die Anzahl der Kfz, die stündlich zur Hauptverkehrszeit eine Straße befahren, sei eine normalverteilte Zufallsgröße X mit den Parametern μ = 1020 und σ^2 = 121.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass stündlich **weniger** als 1000 Kfz die Straße nutzen?

Lösung:

$$P(X < 1.000) \quad = \quad \Phi(-1,864) \quad = \quad 1 - \Phi(1,864) \quad = \quad 1 - 0,96856 \quad = \quad 0,03144 \quad \approx \quad 3,14[\%]$$

$$\textit{Umrechnung}: \quad x = \frac{1.000 - 0,5 - 1.020}{11} = -1,864$$

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl dieser Fahrzeuge im Bereich 1.000 ≤ X ≤ 1.040 liegt?

Lösung:

$$P(1.000 \leq X \leq 1.040) \quad = \quad 2 \cdot \Phi(1,86) - 1 \quad = \quad 2 \cdot 0,96856 - 1 \quad = \quad 0,93712 \quad \approx \quad 93,7[\%]$$

$$\textit{Umrechnung}: \quad x_1 = \frac{1.040 + 0,5 - 1.020}{11} = 1,86 \quad [\textit{Symmetrie} - \textit{Intervall}]$$

c) Wie groß ist die Wahr.-keit, dass stündlich **mehr** als 1040 Kfz die Straße nutzen?

Lösung:

$$P(X > 1.040) = 1 - P(X \leq 1.040) = 1 - \left[P(X < 1.000) + P(1.000 \leq X \leq 1.040)\right]$$
$$P(X > 1.040) = 1 - [0,03144 + 0,93712] = 0,03144$$

Bei einer neuen Untersuchung wurde bekannt, dass 94 % der Kfz in einem zum Erwartungswert μ symmetrischen Intervall [1.010 , 1.090] liegen.

d) Wie groß ist die Standardabweichung σ ?

Lösung:

$$\mu = \frac{1.010 + 1090}{2} = 1.050$$

$$Umrechnung: \quad x_1 = \frac{1.090 + 0,5 - 1.050}{\sigma} = \frac{40,5}{\sigma} \quad [Symmetrie - Intervall]$$

$$P(1.010 \leq X \leq 1.090) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{40,5}{\sigma}\right) - 1 = 0,94$$

$$\xrightarrow[:2]{+1} \Phi\left(\frac{40,5}{\sigma}\right) = 0,97 \xrightarrow{Tabelle} \frac{40,5}{\sigma} = 1,89 \xrightarrow[:1,89]{\cdot\sigma} \sigma = 21,43$$

e) Mit welcher Standardabweichung darf die Anlage höchstens arbeiten, damit 99 % der Realisierungen in diesem Intervall liegen?

Lösung:

$$P(1.010 \leq X \leq 1.090) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{40,5}{\sigma}\right) - 1 = 0,99$$

$$\xrightarrow[:2]{+1} \Phi\left(\frac{40,5}{\sigma}\right) = 0,995 \xrightarrow{Tabelle} \frac{40,5}{\sigma} = 2,58 \xrightarrow[:1,89]{\cdot\sigma} \sigma = 15,7$$