

Ökonomische Grundbegriffe:

Betriebsoptimum (BO): Das BO ist die Ausbringungsmenge, bei deren Produktion die geringsten Durchschnittskosten entstehen.

Langfristige Preisuntergrenze (LPU):

Die LPU ist hier der Preis, der den minimalen Durchschnittskosten entspricht.

Betriebsminimum (BM): Das BM ist die Ausbringungsmenge, bei deren Produktion die geringsten durchschnittlichen Variablen Kosten entstehen.

Kurzfristige Preisuntergrenze (KPU): Die KPU ist hier der Preis, der den minimalen durchschnittlichen variablen Kosten entspricht.

Cournot-Punkt (CP): Unter dem CP versteht man den Punkt auf dem Graphen der Preis-Absatz-Funktion (PAF) eines Monopolisten, der an der selben Stelle liegt, wie der Schnittpunkt zwischen Grenzkosten- und Grenzerlösfunktion. Dies dokumentiert die gewinnmaximale Menge und der zu ihr gehörende Preis.

Gewinnschwelle und Gewinngrenze: Der Gewinn eines Betriebes errechnet sich aus der Differenz des erzielten Erlöses und der entstandenen Kosten zur gleichen Menge. Bei Aufnahme der Produktion sind die Kosten aufgrund bestehender Fixkosten zunächst höher als die Erlöse, der Betrieb befindet sich in der Verlustzone. Bei einer bestimmten Produktionsmenge geht der Betrieb von der Verlust in die Gewinnzone über; diese Stelle wird als *Gewinnschwelle* bezeichnet (d.h. Kosten = Erlöse).

Bei ertragsgesetzlichem Kostenverlauf gibt es im ersten Quadranten einen zweiten Schnittpunkt zwischen Kosten- und Erlösfunktion, bei dem ein Übergang von der Gewinn- in die zweite Verlustzone erfolgt. Diese Stelle wird als *Gewinngrenze* bezeichnet.

Sättigungsgrenze: Unter der Sättigungsmenge versteht man die Menge, bei der auf dem Markt selbst zum Preis von 0,00 € keine weiteren Produkte mehr absetzen kann, da der Markt gesättigt ist.

Lösungen der Übungsaufgaben:

Ein Winzer aus der Pfalz versucht für seinen Riesling den günstigsten Preis herauszufinden. Er bietet den Wein in verschiedenen Verkaufsstellen zu unterschiedlichen Preisen an und hält die tägliche Absatzmenge fest. Das Ergebnis fasst folgende Tabelle zusammen:

Preis pro Flasche	7,40	7,00	6,60	6,20	5,80
Absatzmenge	20	40	60	80	100

- Bestimmen Sie den Term der Preis-Absatz-Funktion.
- Wie lautet die Erlösfunktion?
- Die Weinproduktion verursacht Kosten nach folgender Funktion:

$$K(x) = 0,001x^3 - 0,1x^2 + 5x + 80 \quad \text{mit} \quad D = [0; 500].$$
 Berechnen Sie nun die Gewinnschwelle und die Gewinngrenze.
- Bestimmen Sie den Cournot-Punkt und den maximalen Gesamtgewinn.

Lösung:

Preis-Absatz-Funktion:

$$\text{Steigung: } m = \frac{7 - 7,4}{40 - 20} = \frac{-0,4}{20} = -\frac{2}{100}$$

$$y\text{-Achsenabschnitt: } 7 = -\frac{2}{100} \cdot 40 + b \Rightarrow b = 7,8$$

$$\text{PAF: } p(x) = -\frac{2}{100}x + 7,8$$

$$\text{Erlösfunktion: } E(x) = x \cdot p(x) = x \cdot \left(-\frac{2}{100}x + 7,8\right) = -\frac{2}{100}x^2 + 7,8x$$

Gewinnschwelle und Gewinngrenze:

$$K(x) = E(x) \Rightarrow 0,001x^3 - 0,1x^2 + 5x + 80 = -\frac{2}{100}x^2 + 7,8x$$

Lösungen: $x_1 = -40$ (nicht im ökonomischen Definitionsbereich)

$x_2 = 20 \Rightarrow$ Gewinnschwelle $x_3 = 100 \Rightarrow$ Gewinngrenze

Gewinnfunktion:

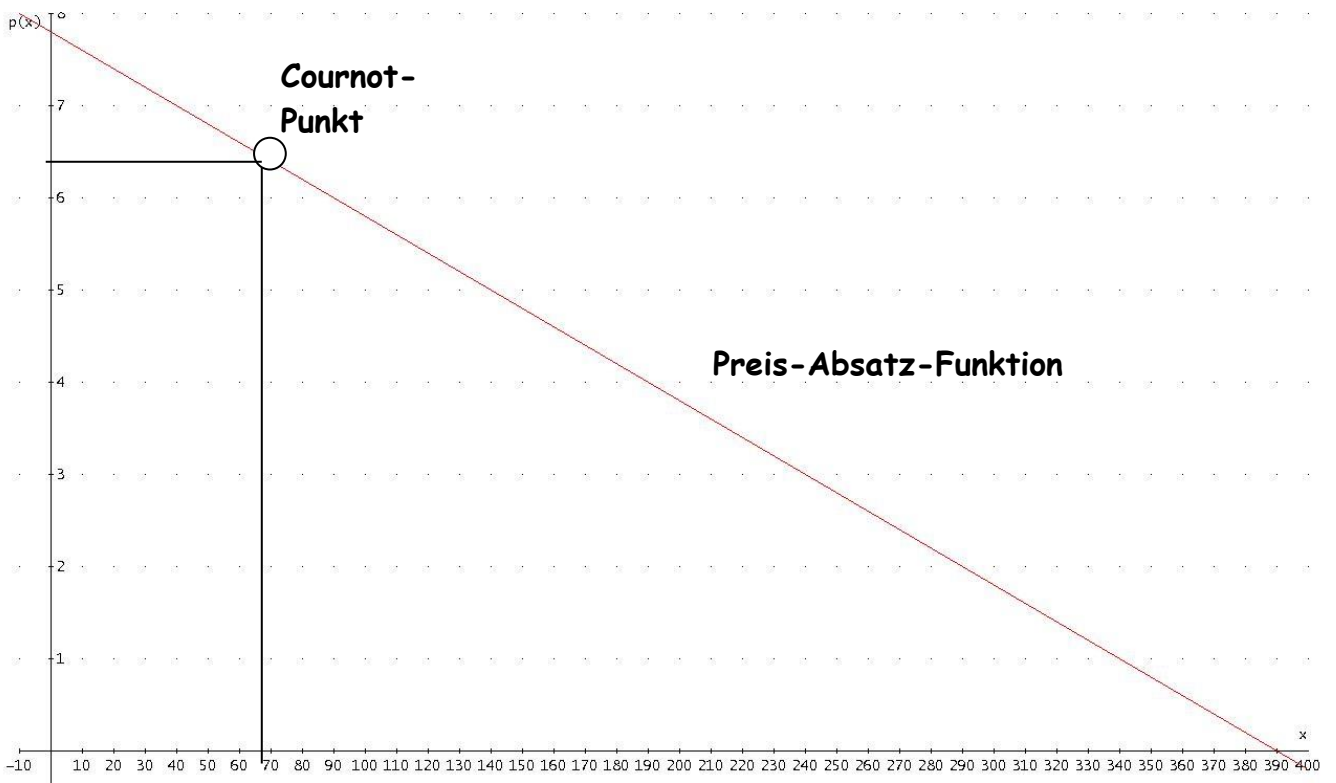
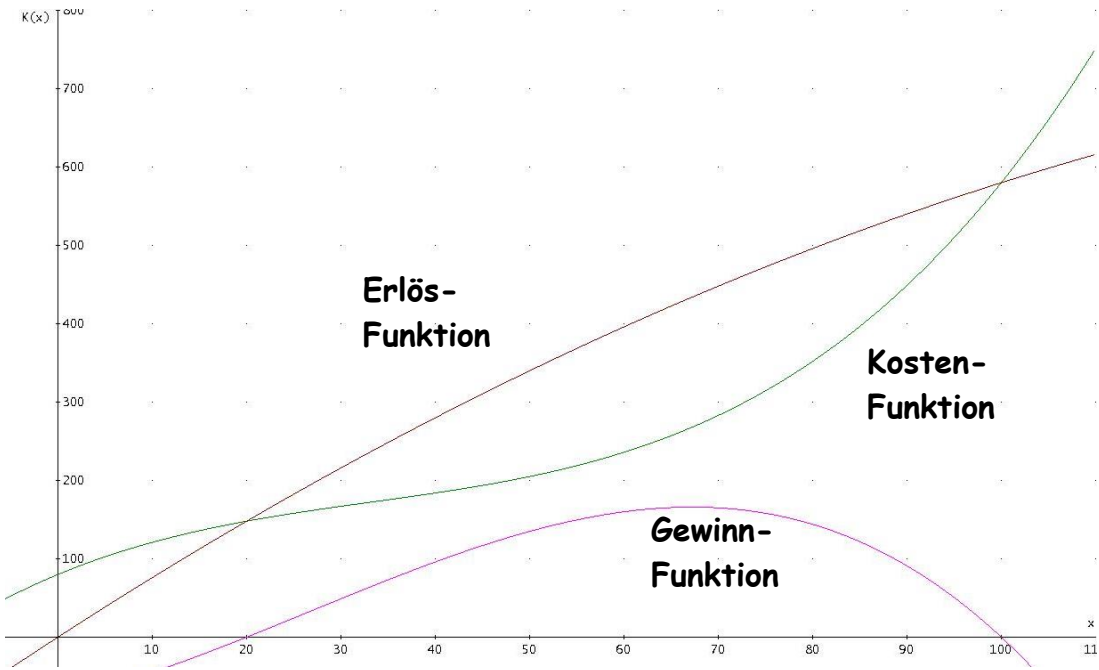
$$G(x) = -0,001x^3 + 0,08x^2 + 2,8x - 80$$

$$G'(x) = -0,003x^2 + 0,16x + 2,8 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 67,2 \quad [\vee \quad x_2 = -13,88]$$

$$G''(x) = -0,006x + 0,16 \Rightarrow G''(67,2) = -0,2432 < 0 \Rightarrow \text{MAX}$$

$$\text{Cournot-Punkt: } p(67,2) = -\frac{2}{100} \cdot 67,2 + 7,8 = 6,456 \Rightarrow C(67,2 \mid 6,456)$$



Die folgende Wertetabelle gehört zu einer Kostenfunktion dritten Grades.

Produktionsmenge	x	0	1	2	3
Kosten (T€)	K(x)	24	38	40	42

- Bestimmen Sie den Term der Gesamtkostenfunktion.
- Wie lauten die Terme der Grenzkosten, der Durchschnittskosten, der variablen Grenzkosten und der variablen Durchschnittskosten und deren Minima (x-Werte)?
- Ermitteln Sie die Gewinnschwelle und Gewinngrenze bei einem Preis von 14,00 € pro Stück.
- Wo befinden sich gewinnmaximale Produktionsmenge und maximaler Gewinn?

Lösung:

- Lösen eine LGS mit 4 Variablen und 4 Gleichungen

$$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$I.) \quad 24 = d$$

$$II.) \quad 38 = a + b + c + 24$$

$$III.) \quad 40 = 8a + 4b + 2c + 24$$

$$IV.) \quad 42 = 27a + 9b + 3c + 24$$

$$\text{Lösung: } K(x) = 2x^3 - 12x^2 + 24x + 24$$

$$b) \quad \text{Grenzkosten: } K_{\text{grenz}}(x) = K'(x) = 6x^2 - 24x + 24$$

$$\text{Durchschnittskosten: } K_{\text{durch}}(x) = \frac{K(x)}{x} = 2x^2 - 12x + 24 + \frac{24}{x}$$

$$\text{Variable Grenzkosten: } K_{\text{var grenz}}(x) = K'_{\text{var}}(x) = 6x^2 - 24x + 24$$

$$\text{Variable Durchschnittskosten: } K_{\text{var durch}}(x) = \frac{K_{\text{var}}(x)}{x} = 2x^2 - 12x + 24$$

Minima der jeweiligen Kostenfunktionen:

$$(i) \quad \text{Grenzkosten: } K'_{\text{grenz}}(x) = K''(x) = 12x - 24 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = 2$$

(ii) Durchschnittskosten:

$$K'_{\text{durch}}(x) = \left[\frac{K(x)}{x} \right]' = 4x - 12 - \frac{24}{x^2} \stackrel{!}{=} 0 \xrightarrow{\cdot x^2} \xrightarrow{:4} x^3 - 3x^2 - 6 = 0$$

$$\xrightarrow{TR} x = 3,492$$

(iii) Variable Grenzkosten:

$$K_{\text{var grenz}}'(x) = K_{\text{var}}''(x) = 12x - 24 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = 2$$

(iv) Variable Durchschnittskosten:

$$K_{\text{var durch}}'(x) = \left[\frac{K_{\text{var}}(x)}{x} \right]' = 4x - 12 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = 3$$

c) Gewinnschwelle und Gewinngrenze:

$$2x^3 - 12x^2 + 24x + 24 = 14x$$

$$K(x) = E(x) \Rightarrow \Rightarrow G(x) = -2x^3 + 12x^2 - 10x - 24 \stackrel{!}{=} 0$$

Lösungen: $x_1 = 3$ (aus der Wertetabelle) \Rightarrow Gewinnschwelle

$x_2 = 4$ \Rightarrow Gewinngrenze

$x_3 = -1$ (nicht im ökonomischen Definitionsbereich)

d) Gewinnmaximum

$$G(x) = -2x^3 + 12x^2 - 10x - 24$$

$$G'(x) = -6x^2 + 24x - 10 \stackrel{!}{=} 0$$

$\Rightarrow x_1 \approx 3,52$ [$\vee x_2 \approx 0,47$ weil außerhalb des Gewinnbereichs!]

$$G''(x) = -12x + 24 \Rightarrow G''(3,52) < 0 \Rightarrow \text{MAX}(3,52 \mid 2,25)$$

Der Gewinn einer Unternehmung wird durch folgende Funktion gegeben:

$$G(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 96x - 200 \quad \text{mit} \quad D = [0; 25]$$

Ermitteln Sie das Gewinnmaximum und den Gesamtgewinn.

Beweisen Sie Ihre Behauptung!

Lösung:

$$G(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 96x - 200 \quad \text{mit} \quad D = [0; 25]$$

$$G'(x) = -x^2 + 4x + 96 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x_1 = 12 \quad \vee \quad x_2 = -8$$

$$G''(x) = -2x + 4 \Rightarrow G''(12) = -20 < 0 \Rightarrow \text{Max}(12 \mid 664)$$

$$\text{Randwerte: } G(0) = -200 \quad \vee \quad G(25) = -1.758,33$$

\Rightarrow Das relative Maximum ist auch absolutes Maximum der Gewinnfunktion.

Gegeben sind die PAF $p_N(x) = 0,01 \cdot (x-100)^2$ und die Kostenfunktion des Monopolisten mit $K(x) = 0,01x^3 - x^2 + 40x + 300$.

- Berechnen Sie den Höchstpreis und die Sättigungsmenge.
- Wie lautet die Erlösfunktion und ihr Maximum?
- Berechnen Sie Gewinnschwelle und Gewinngrenze.
- Wie lauten die gewinnmaximale Menge und der Cournot-Punkt?

Lösung:

a) Höchstpreis: $p_N(0) = 0,01 \cdot (0-100)^2 = 100$

Sättigungsgrenze: $p_N(x) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow 0,01 \cdot (x-100)^2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x=100$

$$E(x) = x \cdot p_N(x) = 0,01x \cdot (x-100)^2 = 0,01x^3 - 2x^2 + 100x$$

b) $E'(x) = 0,03x^2 - 4x + 100 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x_1=100 \vee x_2 = \frac{100}{3}$

$$E''(x) = 0,06x - 4 \Rightarrow E''\left(\frac{100}{3}\right) = -2 < 0 \Rightarrow \text{Max}$$

- c) Gewinnschwelle und Gewinngrenze

$$K(x) = E(x) \Rightarrow 0,01x^3 - x^2 + 40x + 300 = 0,01x^3 - 2x^2 + 100x$$

$$\Rightarrow G(x) = -x^2 + 60x + 300 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 5,51 (\text{Gewinnschwelle}) \vee x_2 = 54,5 (\text{Gewinngrenze})$$

- d) gewinnmaximale Menge und der Cournot-Punkt

$$G(x) = -x^2 + 60x + 300 \Rightarrow G'(x) = -2x + 60 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = 30$$

$$G''(x) = -2 < 0 \Rightarrow \text{Max}$$

$$p(30) = 49 \Rightarrow C(30 | 49)$$

Ein Monopolist, dessen Kostenfunktion durch $K(x) = x^3 - 10x^2 + 43x + 72$ beschrieben werden kann, sieht sich einer linearen Nachfragefunktion mit der Sättigungsmenge 20 ME und dem Höchstpreis 70 GE gegenüber.

- Bestimmen die Funktionsterme der Nachfrage und Erlösfunktion.
- Errechnen Sie den Wendepunkt der Gesamtkostenkurve.
- Bestimmen Sie die kostengünstigste Ausbringungsmenge.
- Ermitteln Sie Gewinnschwelle und Gewinngrenze.
- Bestimmen Sie die gewinnmaximale Ausbringungsmenge und den zugehörigen Gesamtgewinn.

Lösung:

- a) Nachfragefunktion:

$$p(0) = 70 \quad \vee \quad p(20) = 0$$

$$p(x) = mx + b \xrightarrow[\substack{\text{Punkt } p(20)=0 \text{ einsetzen} \\ b=70}]{} 0 = 20m + 70 \Rightarrow m = -\frac{7}{2}$$

$$p(x) = -\frac{7}{2}x + 70 \Rightarrow E(x) = x \cdot p(x) = -\frac{7}{2}x^2 + 70x$$

- b) Wendepunkt:

$$K(x) = x^3 - 10x^2 + 43x + 72 \Rightarrow K'(x) = 3x^2 - 20x + 43$$

$$K''(x) = 6x - 20 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = \frac{10}{3} \quad \text{und} \quad K'''(x) = 6 \neq 0 \Rightarrow W\left(\frac{10}{3} \mid 141,26\right)$$

- c) Fall 1: kostengünstigste Ausbringungsmenge \Rightarrow Betriebsoptimum
 \Rightarrow Minimum der Durchschnittskosten

$$\frac{K(x)}{x} = x^2 - 10x + 43 + \frac{72}{x} \Rightarrow \left[\frac{K(x)}{x}\right]' = 2x - 10 - \frac{72}{x^2} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\xrightarrow{\cdot x^2} 2x^3 - 10x^2 - 72 = 0 \Rightarrow x = 6 \quad (\text{einzige Lösung})$$

$$\Rightarrow \left[\frac{K(x)}{x}\right]'' = 2 + \frac{144}{x^3} \Rightarrow \left[\frac{K(6)}{6}\right]'' > 0 \Rightarrow \text{Min}$$

$$\Rightarrow \text{Betriebsoptimum: } x = 6 \text{ [ME]}$$

$$\Rightarrow \text{Langfristige Preisuntergrenze: } \frac{K(6)}{6} = 31 \text{ [GE]} \quad (\text{mit Fixkostendeckung})$$

Fall 2: kostengünstigste Ausbringungsmenge \Rightarrow Betriebsminimum

\Rightarrow Minimum der durchschnittlichen variablen Kosten

$$\frac{K_{\text{var}}(x)}{x} = x^2 - 10x + 43 \Rightarrow \left[\frac{K_{\text{var}}(x)}{x} \right]' = 2x - 10 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = 5$$

$$\Rightarrow \left[\frac{K_{\text{var}}(x)}{x} \right]'' = 2 > 0 \Rightarrow \text{Min}$$

\Rightarrow Betriebsminimum: $x = 5$ [ME]

\Rightarrow Kurzfristige Preisuntergrenze: $\frac{K_{\text{var}}(5)}{5} = 18$ [GE] (ohne Fixkostendeckung)

d) Gewinnschwelle und Gewinngrenze

$$K(x) = E(x) \Rightarrow x^3 - 10x^2 + 43x + 72 = -\frac{7}{2}x^2 + 70x$$

$$\Rightarrow G(x) = -x^3 + 6,5x^2 + 27x - 72 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 2 \text{ (Gewinnschwelle)}$$

$$\Rightarrow x_2 = 8,66 \text{ (Gewinngrenze)} \quad \vee \quad x_3 = -4,16 \text{ (n. def.)}$$

e) gewinnmaximale Ausbringungsmenge und den zugehörigen Gesamtgewinn

$$G(x) = -x^3 + 6,5x^2 + 27x - 72$$

$$G'(x) = -3x^2 + 13x + 27 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x_1 = 5,87 \quad \vee \quad x_2 = -1,53 \text{ (n. def.)}$$

$$G''(x) = -6x + 13 \Rightarrow G''(5,87) < 0 \Rightarrow \text{Max}(5,87 \mid 108,20)$$

Gegeben sind die Nachfragefunktion $p_N(x) = -0,16x + 2,8$ und die

$$\text{Kostenfunktion } K(x) = 0,04x^3 - 0,6x^2 + 3x + 2$$

- Berechnen Sie die *Gewinnschwelle* und *Gewinngrenze*.
- Bestimmen Sie die *erlös-* und *gewinnmaximalen Ausbringungsmengen*.
- Ermitteln Sie das *Betriebsminimum*.

Lösung:

- Gewinnschwelle* und *Gewinngrenze*

$$G(x) = E(x) - K(x) = x \cdot p_N(x) - K(x)$$

$$G(x) = -0,16x^2 + 2,8x - (0,04x^3 - 0,6x^2 + 3x + 2) = -0,04x^3 + 0,44x^2 - 0,2x - 2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 10 \text{ (Gewinngrenze)} \Rightarrow x_2 = 2,79 \text{ (Gewinnschwelle)} \vee x_3 = -1,79 \text{ (n. def.)}$$

- erlös-* und *gewinnmaximalen Ausbringungsmengen*

Erlösmaximum:

$$E(x) = -0,16x^2 + 2,8x \Rightarrow E'(x) = -0,32x + 2,8 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = 8,75$$

$$E''(x) = -0,32 < 0 \Rightarrow \text{Max}$$

Gewinnmaximum:

$$G(x) = -0,04x^3 + 0,44x^2 - 0,2x - 2 \Rightarrow G'(x) = -0,12x^2 + 0,88x - 0,2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 7,1 \Rightarrow x_2 = 0,235$$

$$\Rightarrow G''(x) = -0,24x + 0,88 \Rightarrow G''(7,1) < 0 \Rightarrow \text{Max}$$

- Betriebsminimum* \Rightarrow *Minimum der durchschnittlichen variablen Kosten*

$$\frac{K_{\text{var}}(x)}{x} = 0,04x^2 - 0,6x + 3 \Rightarrow \left[\frac{K_{\text{var}}(x)}{x} \right]' = 0,08x - 0,6 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = 7,5$$

$$\Rightarrow \left[\frac{K_{\text{var}}(x)}{x} \right]'' = 0,08 > 0 \Rightarrow \text{Min}$$

$$\Rightarrow \text{Betriebsminimum: } x = 7,5 \text{ [ME]}$$

$$\Rightarrow \text{Kurzfristige Preisuntergrenze: } \frac{K_{\text{var}}(7,5)}{7,5} = 0,75 \text{ [GE]} \text{ (ohne Fixkostendeckung)}$$

Die PAF eines Angebotsmonopolisten lautet: $p_N(x) = -7x + 49$ und die

$$\text{Kostenfunktion } K(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 32$$

Bestimmen Sie

- den ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich $D_{\text{ök}}$.
- das Betriebsoptimum und die langfristige Preisuntergrenze.
- das Betriebsminimum und die kurzfristige Preisuntergrenze.
- die Gewinnschelle und die Gewinngrenze.
- die gewinnmaximale Ausbringungsmenge und den Cournot-Punkt.

Lösung:

a) $D_{\text{ök}} = [0; 7]$ wegen des Höchstpreises und der Sättigungsgrenze

b) Betriebsoptimum und die langfristige Preisuntergrenze

$$\frac{K(x)}{x} = x^2 - 6x + 15 + \frac{32}{x} \Rightarrow \left[\frac{K(x)}{x} \right]' = 2x - 6 - \frac{32}{x^2} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\xrightarrow{\cdot x^2} 2x^3 - 6x^2 - 32 = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ (einzige Lösung)}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{K(x)}{x} \right]'' = 2 + \frac{64}{x^3} \Rightarrow \left[\frac{K(4)}{4} \right]'' > 0 \Rightarrow \text{Min}$$

$$\Rightarrow \text{Betriebsoptimum: } x = 4 \text{ [ME]}$$

$$\Rightarrow \text{Langfristige Preisuntergrenze: } \frac{K(4)}{4} = 15 \text{ [GE] (mit Fixkostendeckung)}$$

c) Betriebsminimum und die kurzfristige Preisuntergrenze

$$\frac{K_{\text{var}}(x)}{x} = x^2 - 6x + 15 \Rightarrow \left[\frac{K_{\text{var}}(x)}{x} \right]' = 2x - 6 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = 3$$

$$\Rightarrow \left[\frac{K_{\text{var}}(x)}{x} \right]'' = 2 > 0 \Rightarrow \text{Min}$$

$$\Rightarrow \text{Betriebsminimum: } x = 3 \text{ [ME]}$$

$$\Rightarrow \text{Kurzfristige Preisuntergrenze: } \frac{K_{\text{var}}(3)}{3} = 6 \text{ [GE]}$$

(ohne Fixkostendeckung)

d) Gewinnschelle und die Gewinngrenze

$$G(x) = E(x) - K(x) = x \cdot p_N(x) - K(x)$$

$$G(x) = -7x^2 + 49x - (x^3 - 6x^2 + 15x + 32) = -x^3 - x^2 + 34x - 32 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 1 \text{ (Gewinngrenze)}$$

$$\Rightarrow x_2 = 4,74 \text{ (Gewinnschwelle)} \quad \vee \quad x_3 = -6,74 \text{ (n. def.)}$$

e) gewinnmaximale Ausbringungsmenge und den Cournot-Punkt

$$G(x) = -x^3 - x^2 + 34x - 32 \Rightarrow G'(x) = -3x^2 - 2x + 34 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 3,05 \quad \vee \quad x_2 = -3,7 \text{ (n. def.)}$$

$$G''(x) = -6x - 2 \Rightarrow G''(3,05) < 0 \Rightarrow \text{Max}$$

$$p(3,05) = 24,5 \Rightarrow C(3,05 \mid 24,5)$$