Mathematik
Jürgen Meisel

LÖSUNGEN

1.) Leiten Sie nach der h-Methode ab:

a) f (x) = x^2 b) f (x) = $3x^4$ c) f (x) = x^n

$$a) \quad f(x) = x^2$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh - h^2 - x^2}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x-h)}{h} = \lim_{h\to 0} (2x-h) \xrightarrow{h\to 0} 2x$$

$$b) \quad f(x) = 3x^4$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3(x+h)^4 - 3x^4}{h}$$

$$f'(x) = 3\cdot \lim_{h\to 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h}$$

$$f'(x) = 3\cdot \lim_{h\to 0} \frac{h\left(4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3\right)}{h}$$

$$f'(x) = 3\cdot \lim_{h\to 0} \left(4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3\right) \xrightarrow{h\to 0} 12x^3$$

$$c) \quad f(x) = x^n$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k\right] - x^n}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{h\left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1}\right)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \left[\binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \ldots + \binom{n}{n} h^{n-1}\right] \xrightarrow{h\to 0} n\, x^{n-1}$$

2.) Geben Sie die Ableitung folgender Funktionen an:

a) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + x + 2$

b) $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x + 2$

c) $f(t) = \frac{2}{t^3} - \frac{1}{t} + 5$

d) $f(x) = x^2 * \ln x$

e) $f(t) = \frac{\ln t}{t}$

f) $f(x) = x^4 * e^x$

g) $f(x) = t^2$

h) $f(t) = \frac{e^t}{1 - e^t}$

i) $f(x) = \ln \sqrt[3]{\frac{2x - 1}{2x + 1}}$

j) $f(x) = \ln(1 - 3x^2)$

k) $f(x) = (1 - \ln x)^3$

l) $f(t) = e^{2t} + e^{t^2} - e$

m) $f(x) = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x)$

n) $f(t) = \ln(t + \sqrt{1 + t^2})$

o) $f(x) = x^3 + \ln x$

p) $f(x) = x^2 * e^x$

q) $f(t) = (t^2 + x + 4)(x^3 - 2t - 4)$

r) $f(x) = (t^2 + x + 4)(x^3 - 2t - 4)$

s) $f(x) = \ln(x^2 + x)$

t) $f(x) = \frac{(1 + x)^2}{(1 - x)^2}$

u) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

v) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 1}$

w) $f(t) = \frac{t^2}{\sqrt{1 - t^2}}$

x) $f(x) = \frac{5}{1 + e^{2 - 3x^3}}$

y) $f(x) = (x^2 - 1) * \frac{1}{x^2}$

z) $f(x) = \sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x} + e^2$

ä) $f(a) = \frac{a^2 - 4a + 3}{12a - 9 - 3a^2}$

$a) \quad f(x) = 4x^3 - 3x^2 + x + 2$

$\xrightarrow[\text{}]{\text{1. Ableitung: Potenz-/Summenregel}} \quad f'(x) = 12x^2 - 6x + 1$

$b) \quad f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x + 2$

$\xrightarrow[\text{}]{\text{1. Ableitung: Potenz-/Summenregel}} \quad f'(x) = 15x^2 - 4x + 3$

$c) \quad f(t) = \frac{2}{t^3} - \frac{1}{t} + 5$

$\xrightarrow[\text{}]{\text{1. Ableitung: Potenz-/Summenregel}} \quad f'(t) = -\frac{6}{t^4} + \frac{1}{t^2}$

$d) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$

$\xrightarrow[\text{}]{\text{1. Ableitung: Potenz-/Produktregel}} \quad f'(x) = 2x \cdot \ln(x) + \frac{x^2}{x} = x\left[2 \cdot \ln(x) + 1\right]$

$e) \quad f(t) = \frac{\ln(t)}{t} = t^{-1} \cdot \ln(t)$

$\xrightarrow[\text{}]{\text{1. Ableitung: Potenz-/Produktregel}} \quad f'(t) = -t^{-2} \cdot \ln(t) + t^{-1} \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{t^2}\left[1 - \ln(t)\right]$

$f) \quad f(x) = x^4 \cdot e^x$

$\xrightarrow[\text{}]{\text{1. Ableitung: Potenz-/Produktregel}} \quad f'(x) = 4x^3 \cdot e^x + x^4 \cdot e^x = x^3 \cdot e^x\left[4 + x\right]$

$g) \quad f(x) = t^2$

$\xrightarrow[\text{}]{\text{1. Ableitung: Potenzregel (aber: Hallo - wach!!! - Funktionsvartiable)}} \quad f'(x) = 0$

$h) \quad f(t) = \frac{e^t}{1 - e^t}$

$\xrightarrow[\text{}]{\text{1. Ableitung: Quotientenregel}} \quad f'(t) = \frac{e^t\left(1 - e^t\right) - e^t\left(-e^t\right)}{\left(1 - e^t\right)^2} = \frac{e^t}{\left(1 - e^t\right)^2}$

$$i)\quad f(x)=\ln\sqrt[3]{\frac{2x-1}{2x+1}}=\ln\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\ln\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{}]{\text{1. Ableitung: Ketten-/Quotientenregel}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{2x-1}{2x+1}}\cdot\frac{2(2x+1)-2(2x-1)}{(2x+1)^2}=\frac{4}{3(4x^2-1)}$$

$$j)\quad f(x)=\ln(1-3x^2)$$

$$\xrightarrow{\text{1. Ableitung: Kettenregel}}\quad f'(x)=-\frac{6x}{1-3x^2}$$

$$k)\quad f(x)=(1-\ln x)^3$$

$$\xrightarrow{\text{1. Ableitung: Kettenregel}}\quad f'(x)=3(1-\ln x)^2\cdot\frac{-1}{x}=-\frac{3(1-\ln x)^2}{x}$$

$$l)\quad f(t)=e^{2t}+e^{t^2}-e$$

$$\xrightarrow{\text{1. Ableitung: Kettenregel}}\quad f'(t)=2e^{2t}+2te^{t^2}$$

$$m)\quad f(x)=\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)$$

$$\xrightarrow{\text{1. Ableitung: Produktregel}}\quad f'(x)=\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)+\frac{e^x}{2}(\cos x-\sin x)=e^x\cos x$$

$$n)\quad f(t)=\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{1. Ableitung: Kettenregel}}\quad f'(t)=\frac{1}{t+\sqrt{1+t^2}}\left(1+\frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}\right)=\frac{1}{t+\sqrt{1+t^2}}\left(1+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$$

$$o)\quad f(x)=x^3+\ln x$$

$$\xrightarrow{\text{1. Ableitung: Potenzregel}}\quad f'(x)=3x^2+\frac{1}{x}$$

$p) \quad f(x) = x^2 e^x$

$$\xrightarrow[\text{Produktregel}]{\text{1. Ableitung:}} \quad f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = xe^x(2+x)$$

$q) \quad f(t) = \left(t^2 + x + 4\right)\left(x^3 - 2t - 4\right)$

$$\xrightarrow[\text{Potenz-/Summen-/Produktregel}]{\text{1. Ableitung:}} \quad f'(t) = 2t\left(x^3 - 2t - 4\right) - 2\left(t^2 + x + 4\right)$$

$r) \quad f(x) = \left(t^2 + x + 4\right)\left(x^3 - 2t - 4\right)$

$$\xrightarrow[\text{Potenz-/Summen-/Produktregel}]{\text{1. Ableitung:}} \quad f'(x) = 1 \cdot \left(x^3 - 2t - 4\right) + 3x^2 \cdot \left(t^2 + x + 4\right)$$

$s) \quad f(x) = \ln\left(x^2 + x\right)$

$$\xrightarrow[\text{Potenz-/Kettenregel}]{\text{1. Ableitung:}} \quad f'(x) = \frac{1}{x^2 + x} \cdot (2x+1)$$

$t) \quad f(x) = \dfrac{(1+x)^2}{(1-x)^2}$

$$\xrightarrow[\text{Quotienten-/Kettenregel}]{\text{1. Ableitung:}}$$

$$f'(x) = \frac{2(1+x)(1-x)^2 - 2(1+x)^2(1-x)}{(1-x)^4} = -\frac{4x(1+x)}{(1-x)^3}$$

$u) \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

$$\xrightarrow[\text{Potenz-/Kettenregel}]{\text{1. Ableitung:}} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$v) \quad f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 1} = \left(x^2 - 1\right)^{\frac{1}{4}}$

$$\xrightarrow[\text{Potenz-/Kettenregel}]{\text{1. Ableitung:}} \quad f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \left(x^2 - 1\right)^{-\frac{3}{4}} \cdot 2x = \frac{x}{2 \cdot \sqrt[4]{\left(x^2 - 1\right)^3}}$$

$w) \quad f(t)=\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}$

$\xrightarrow[\text{Quotienten-/Kettenregel}]{\text{1. Ableitung:}}$

$$f'(t)=\frac{2t\sqrt{1-t^2}-t^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}\cdot(-2t)}{1-t^2}=\frac{2t+\frac{t^3}{1-t^2}}{\sqrt{1-t^2}}$$

$x) \quad f(x)=\frac{5}{1+e^{2-3x^3}}=5\cdot\left(1+e^{2-3x^3}\right)^{-1}$

$\xrightarrow[\text{Kettenregel}]{\text{1. Ableitung:}}$

$$f'(x)=-5\cdot\left(1+e^{2-3x^3}\right)^{-2}\cdot e^{2-3x^3}\cdot\left(-9x^2\right)=\frac{45x^2\cdot e^{2-3x^3}}{\left(1+e^{2-3x^3}\right)^2}$$

$y) \quad f(x)=\left(x^2-1\right)\cdot\frac{1}{x^2}$

$\xrightarrow[\text{Produktregel}]{\text{1. Ableitung:}} \quad f'(x)=2x\cdot\frac{1}{x^2}+\left(x^2-1\right)\cdot\frac{(-2)}{x^3}=\frac{2}{x^3}$

$z) \quad f(x)=\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x}+e^2=x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{2}}+e^2$

$\xrightarrow[\text{Produktregel}]{\text{1. Ableitung:}} \quad f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}-x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{\sqrt{x}}$

$ä) \quad f(a)=\frac{a^2-4a+3}{-3a^2+12a-9}=\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{a^2-4a+3}{a^2-4a+3} \quad\Rightarrow\quad f^*(a)=\left(-\frac{1}{3}\right)$

$\xrightarrow[\text{Potenzregel}]{\text{1. Ableitung:}} \quad f'(a)=0$

3.) Ableitungen von besonderer Güte: die Exponentialfunktionen

a) f (x) = e^x b) f (x) = a^x c) f (x) = x^x

d) f (x) = a^{x^2} e) f (x) = $a^{2x^4-x^2}$ f) f (x) = $4x^{x^5-3x^4-1}$

g) f (x) = x^{x^4} h) f (x) = $a^{x^8-x^4}$

a) $f\left(x\right)=e^x \xrightarrow{\text{1. Ableitung:}} f'\left(t\right)=e^x$

b) $f\left(x\right)=a^x \xrightarrow{\text{e als neue Basis transformieren}} f\left(x\right)=e^{\ln\left(a^x\right)}=e^{x\cdot\ln a}$

$\xrightarrow[\text{Kettenregel}]{\text{1. Ableitung:}} f'\left(x\right)=e^{x\cdot\ln a}\cdot\ln a=a^x\cdot\ln a$

c) $f\left(x\right)=x^x \xrightarrow{\text{e als neue Basis transformieren}} f\left(x\right)=e^{\ln\left(x^x\right)}=e^{x\cdot\ln x}$

$\xrightarrow[\text{Ketten-/Produktregel}]{\text{1. Ableitung:}} f'\left(x\right)=e^{x\cdot\ln x}\cdot\left(1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)=x^x\cdot\left(\ln x+1\right)$

d) $f\left(x\right)=a^{x^2} \xrightarrow{\text{e als neue Basis transformieren}} f\left(x\right)=e^{\ln\left(a^{x^2}\right)}=e^{x^2\cdot\ln a}$

$\xrightarrow[\text{Kettenregel}]{\text{1. Ableitung:}} f'\left(x\right)=e^{x^2\cdot\ln a}\cdot 2x\ln a=a^{x^2}\cdot 2x\ln a$

e) $f\left(x\right)=a^{2x^4-x^2} \xrightarrow{\text{e als neue Basis transformieren}}$

$f\left(x\right)=e^{\ln\left(a^{2x^4-x^2}\right)}=e^{\left(2x^4-x^2\right)\cdot\ln a}$

$\xrightarrow[\text{Kettenregel}]{\text{1. Ableitung:}}$

$f'\left(x\right)=e^{\left(2x^4-x^2\right)\cdot\ln a}\cdot\left(8x^3-2x\right)\ln a=a^{2x^4-x^2}\cdot 2x\cdot\left(4x^2-1\right)\ln a$

$f)\quad f(x)=x^{x^5-3x^4-1} \xrightarrow{\text{e als neue Basis transformieren}}$

$$f(x)=e^{\ln\left(x^{x^5-3x^4-1}\right)}=e^{\left(x^5-3x^4-1\right)\cdot\ln x}$$

$\xrightarrow[\text{Ketten-/Produktregel}]{\text{1. Ableitung:}}$

$$f'(x)=e^{\left(x^5-3x^4-1\right)\cdot\ln x}\cdot\left[\left(5x^4-12x^3\right)\cdot\ln x+\left(x^5-3x^4-1\right)\cdot\frac{1}{x}\right]$$

$$f'(x)=x^{x^5-3x^4-1}\cdot\left[\left(5x^4-12x^3\right)\cdot\ln x+x^4-3x^3-\frac{1}{x}\right]$$

$g)\quad f(x)=x^{x^4} \xrightarrow{\text{e als neue Basis transformieren}} f(x)=e^{\ln\left(x^{x^4}\right)}=e^{x^4\cdot\ln x}$

$\xrightarrow[\text{Ketten-/Produktregel}]{\text{1. Ableitung:}}$

$$f'(x)=e^{x^4\cdot\ln x}\cdot\left(4x^3\cdot\ln x+x^4\cdot\frac{1}{x}\right)=x^{x^4}\cdot x^3\left(4\cdot\ln x+1\right)$$

$h)\quad f(x)=a^{x^8-x^4} \xrightarrow{\text{e als neue Basis transformieren}}$

$$f(x)=e^{\ln\left(a^{x^8-x^4}\right)}=e^{\left(x^8-x^4\right)\cdot\ln a}$$

$\xrightarrow[\text{Kettenregel}]{\text{1. Ableitung:}}$

$$f'(x)=e^{\left(x^8-x^4\right)\cdot\ln a}\cdot\left(8x^7-4x^3\right)\ln a=a^{x^8-x^4}\cdot 4x^3\cdot\left(2x^4-1\right)\ln a$$