Übungen zur Kurvendiskussion ganzrationaler Funktionen ...
... mit gebrochenrationalen Elementen

1.) Untersuchung einer ganzrationalen Funktion

Gegeben sei die Funktionenschar f_k mit

$$f_k(x) = -\frac{1}{k}x^3 + \frac{1}{k}x(k+2) \quad ; \qquad k > 0$$

(i) Untersuchen Sie die Funktion hinsichtlich folgender Kriterien:

a) Symmetrie
b) Nullstellen
c) Extrem**stellen**
d) Wendepunkt
e) Wendetangente
f) Grenzwertverhalten an den Rändern des Definitionsbereichs

<u>Lösung:</u>

$$Symmetrie:$$

$$f_k(-x) = -\frac{1}{k}(-x)^3 + \frac{1}{k}(-x)(k+2) = \frac{1}{k}x^3 - \frac{1}{k}x(k+2) = -f_k(x)$$

$$\Rightarrow \quad Punktsymmetrie$$

$$Nullstellen:$$

$$\frac{1}{k}x\left(-x^2 + k + 2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad |x| = \sqrt{k+2}$$

$$Extremwertstellen:$$

$$f_k'(x) = -\frac{3}{k}x^2 + \frac{1}{k}(k+2) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 \overset{!}{=} k+2$$

$$\Rightarrow \quad |x| = \sqrt{\frac{k+2}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3(k+2)}$$

$$f_k''(x) = -\frac{6}{k}x \quad \Rightarrow \quad f_k''\left(\frac{1}{3}\sqrt{3(k+2)}\right) = -\frac{2}{k}\sqrt{3(k+2)} < 0$$

$$\Rightarrow \quad Max\ in\ x_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3(k+2)}$$

$$\Rightarrow \quad Min\ in\ x_2 = -\frac{1}{3}\sqrt{3(k+2)} \quad wegen\ Punktsymmetrie$$

Wendepunkt :

$$f_k''(x) = -\frac{6}{k}x \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$$f_k'''(x) = -\frac{6}{k} \quad \Rightarrow \quad f_k'''(0) = -\frac{6}{k} \quad \Rightarrow \quad W(0 \mid 0)$$

Wen det *angente* :

$$f_k'(0) = \frac{1}{k}(k+2) = m \quad \xrightarrow{\text{da W (0 / 0) gilt, ist b = 0}} \quad t_k(x) = \frac{1}{k}(k+2)x = \left(1 + \frac{2}{k}\right)x$$

Grenzwertverhalten :

$$\lim_{x \to \infty} f_k(x) = -\infty \qquad und \qquad \lim_{x \to -\infty} f_k(x) = \infty$$

(ii) Die Funktion besitzt für $k_i \neq k_j \quad mit\ i, j \in N\ und\ i \neq j$ mehrere identische Funktionswerte, die von k unabhängig sind.

Beweisen Sie diese Behauptung und ermitteln Sie die gesuchten Werte.

<u>**Lösung:**</u>

$$f_k(x) = -\frac{1}{k}x^3 + \frac{1}{k}x(k+2) \quad ; \qquad k > 0$$

$$f_{k_1}(x) = f_{k_2}(x) \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{k_1}x^3 + \frac{1}{k_1}x(k_1+2) = -\frac{1}{k_2}x^3 + \frac{1}{k_2}x(k_2+2)$$

$$\xrightarrow{+\frac{1}{k_2}x^3 - \frac{1}{k_2}x(k_2+2)} \quad \frac{1}{k_2}x^3 - \frac{1}{k_2}x(k_2+2) - \frac{1}{k_1}x^3 + \frac{1}{k_1}x(k_1+2) \quad = \quad 0$$

$$\xrightarrow{x\ ausklammern} \quad x\left[\frac{1}{k_2}x^2 - \frac{1}{k_2}(k_2+2) - \frac{1}{k_1}x^2 + \frac{1}{k_1}(k_1+2)\right] \quad = \quad 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x^2\left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}\right) \quad = \quad \frac{1}{k_2}(k_2+2) - \frac{1}{k_1}(k_1+2)$$

$$\xrightarrow{ausmultiplizieren} \quad x^2\left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}\right) \quad = \quad 1 + \frac{2}{k_2} - 1 - \frac{2}{k_1}$$

$$\xrightarrow{\text{(1-1) verrechnen und 2 ausklammern}} \quad x^2\left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}\right) \quad = \quad 2\left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{da } k_1 \neq k_2 \text{ gilt, darf durch } \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \text{ geteilt weden}} \quad x^2 \quad = \quad 2$$

$$\Rightarrow \quad |x| = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad Ergebnis: \quad S_1(0 \mid 0) \quad S_2\left(\sqrt{2} \mid \sqrt{2}\right) \quad S_3\left(-\sqrt{2} \mid -\sqrt{2}\right)$$

(iii) Der Ursprung O sowie die Punkte A (x / 0) und B (x / $f_k(x)$)
bilden für k > 0 ein rechtwinkliges Dreieck im 1. Quadranten.

Für welches x hat dieses Dreieck einen maximalen Flächeninhalt, wenn k = 6 gilt? Wie groß ist dann die Fläche?

Lösung:

$$f_k(x) = -\frac{1}{k}x^3 + \frac{1}{k}x(k+2) \quad ; \qquad k > 0$$

$$\textit{Flächenfunktion}: \quad f_\Delta(x) = \frac{1}{2}x \cdot f_k(x)$$

$$f_{\Delta,k}(x) \quad = \quad \frac{1}{2}x \cdot f_k(x) \quad = \quad \frac{1}{2}x \cdot \left[-\frac{1}{k}x^3 + \frac{1}{k}x(k+2)\right]$$

$$f_{\Delta,k}(x) \quad = \quad -\frac{1}{2k}x^4 + \frac{1}{2k}x^2(k+2)$$

$$f_{\Delta,k}{}'(x) \quad = \quad -\frac{2}{k}x^3 + \frac{1}{k}x(k+2) \quad \stackrel{!}{=} \quad 0$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{k}x \ \ ausklammern} \quad \frac{1}{k}x\left(-2x^2 + k + 2\right) \quad \stackrel{!}{=} \quad 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad |x| = \sqrt{\frac{k}{2} + 1}$$

$$\xrightarrow{k=6 \ \ einsetzen} \quad f_{\Delta,6}(x) \quad = \quad -\frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^2$$

$$\Rightarrow \quad f_{\Delta,6}{}'(x) \quad = \quad -\frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}x \quad und \quad f_{\Delta,6}{}''(x) \quad = \quad -x^2 + \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad |x| = 2$$

$$\Rightarrow \quad f_{\Delta,6}{}''(2) \quad = \quad -\frac{8}{3} < 0 \quad \Rightarrow \quad Max\left(2 \;\middle|\; \frac{4}{3}\right)$$

(iv) Bestimmen Sie die Werte für k in den nebenstehenden Anlage.

Lösung:

$$f_k(x) = -\frac{1}{k}x^3 + \frac{1}{k}x(k+2) \quad ; \qquad k > 0$$

$$Nullstellen: \quad x = \sqrt{k+2}$$

$$Wert\ \ für\ k_1: \quad 2 = \sqrt{k+2} \quad \Rightarrow \quad k = 2$$

$$Wert\ \ für\ k_2: \quad 3 = \sqrt{k+2} \quad \Rightarrow \quad k = 7$$

$$Wert\ \ für\ k_3: \quad 4 = \sqrt{k+2} \quad \Rightarrow \quad k = 14$$

(v) Für welchen Wertebereich von k, hat die Funktion Nullstellen im Intervall [1,5 ; 2]?

Lösung:

$$f_k(x) = -\frac{1}{k}x^3 + \frac{1}{k}x(k+2) \quad ; \qquad k > 0$$

$$Nullstellen: \quad x = \sqrt{k+2}$$

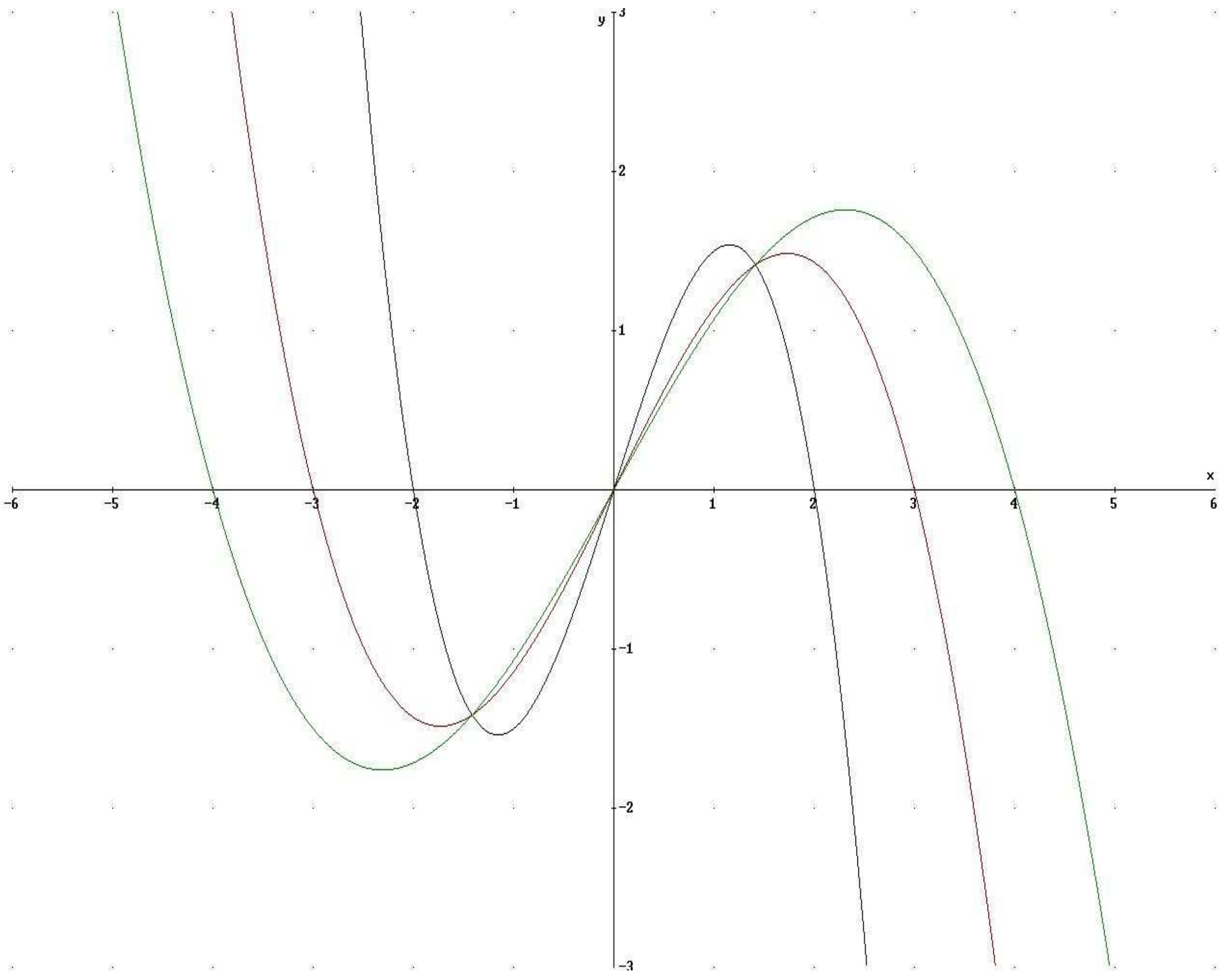
$$Wert\ \ für\ k_1: \quad 2 = \sqrt{k+2} \quad \Rightarrow \quad k = 2$$

$$Wert\ \ für\ k_2: \quad 1{,}5 = \sqrt{k+2} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{4}$$

Anlage zu Aufgabe 1:

Graph der Funktion

$$f_k(x) = -\frac{1}{k}x^3 + \frac{1}{k}x(k+2) \quad ; \qquad k > 0$$



2.) Untersuchung einer ganzrationalen Funktion ...

a) Zeigen Sie, dass bei der Funktionenschar

$$f_k(x) = x^2 - kx \quad ; \qquad k > 0$$

die relative Extremstelle in der Mitte zwischen den Nullstellen liegt.

Lösung:

$$Nullstellen: \quad x(x-k) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = k$$

$$Extremwertstelle: \quad f_k{}'(x) = 2x - k \quad \Rightarrow \quad x = \frac{k}{2}$$

$$Ergebnis: \quad x = \frac{k}{2} \text{ ist Mittelwert des Intervalls } [0\,;k].$$

... mit gebrochenrationalem Element

b) Ermitteln Sie die Ortskurve der Extremwerte der Funktionenschar $f_k(x) = \dfrac{x^2}{k} + \dfrac{2k^2}{x} \quad ; \qquad k > 0$.

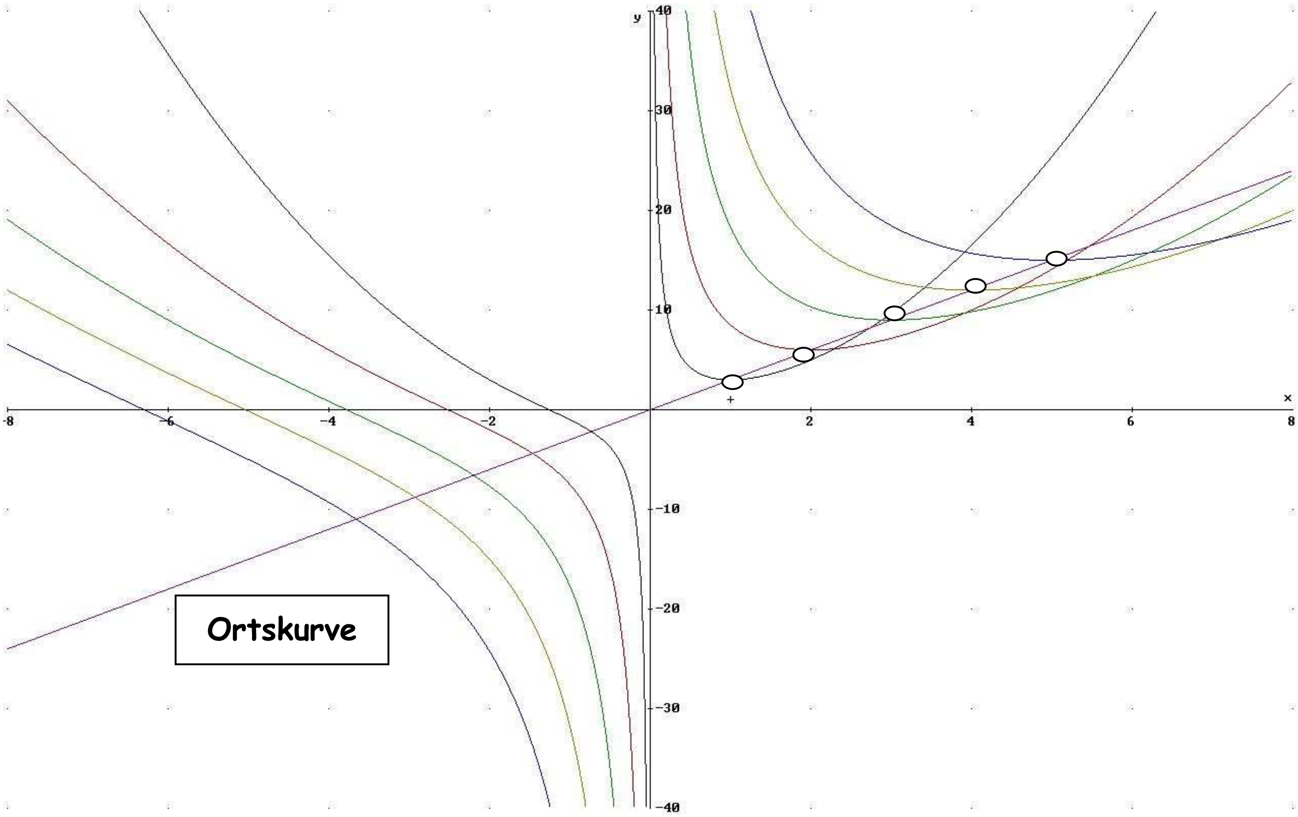
Lösung:

$$f_k(x) = \frac{x^2}{k} + \frac{2k^2}{x} \quad ; \qquad k > 0$$

$$f_k{}'(x) = \frac{2x}{k} - \frac{2k^2}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2x}{k} = \frac{2k^2}{x^2} \quad \Rightarrow \quad x^3 = k^3$$

$$\Rightarrow \quad x = k \quad \Rightarrow \quad k = x$$

$$\xrightarrow{\text{k in Funktion eingesetzt}} \quad f_{k=x}(x) = \frac{x^2}{x} + \frac{2x^2}{x} = 3x$$



Die jeweiligen Kringel stellen die Schnittpunkte zwischen Ortskurve und Funktion dar (Extremwerte)!

3.) **Ganzrationale Parameterfunktion**

Untersuchen Sie die gegebene Funktion

$$f_k\left(x\right)=x^4-kx^2 \quad mit\ k>0$$

hinsichtlich folgender Kriterien:

a) Symmetrie b) Nullstellen

c) Extremwerte d) Wendepunkte

e) Ortskurve der Extremwerte

f) Grenzwertverhalten an den Rändern des Definitionsbereichs

g) Zeichnung der Funktion

Lösung:

$$Symmetrie: \quad f_k(-x) = (-x)^4 - k(-x)^2 = x^4 - kx^2 = f_k(x)$$

$$\Rightarrow \quad Achsensymmetrie$$

$$Nullstellen: \quad x^2\left(x^2 - k\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_{2/3} = \pm\sqrt{k}$$

$$Extremwert:$$

$$f_k'(x) = 4x^3 - 2kx \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 2x\left(2x^2 - k\right) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_{2/3} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2k}$$

$$f_k''(x) = 12x^2 - 2k \quad \Rightarrow \quad f_k''(0) = -2k < 0 \quad \Rightarrow \quad Max(0 \mid 0)$$

$$f_k''(x) = 12x^2 - 2k \quad \Rightarrow \quad f_k''\left(\frac{1}{2}\sqrt{2k}\right) = 4k > 0$$

$$\Rightarrow \quad Min_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{2k} \;\middle|\; -\frac{1}{4}k^2\right) \quad \wedge \quad Min_2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2k} \;\middle|\; -\frac{1}{4}k^2\right)$$

$$Wendepunkt:$$

$$f_k''(x) = 12x^2 - 2k \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad |x| = \frac{1}{6}\sqrt{6k}$$

$$f_k'''(x) = 24x \quad \Rightarrow \quad f_k'''\left(\frac{1}{6}\sqrt{6k}\right) = 4\sqrt{6k} \quad \Rightarrow \quad W\left(\frac{1}{6}\sqrt{6k} \;\middle|\; -\frac{5}{36}k^2\right)$$

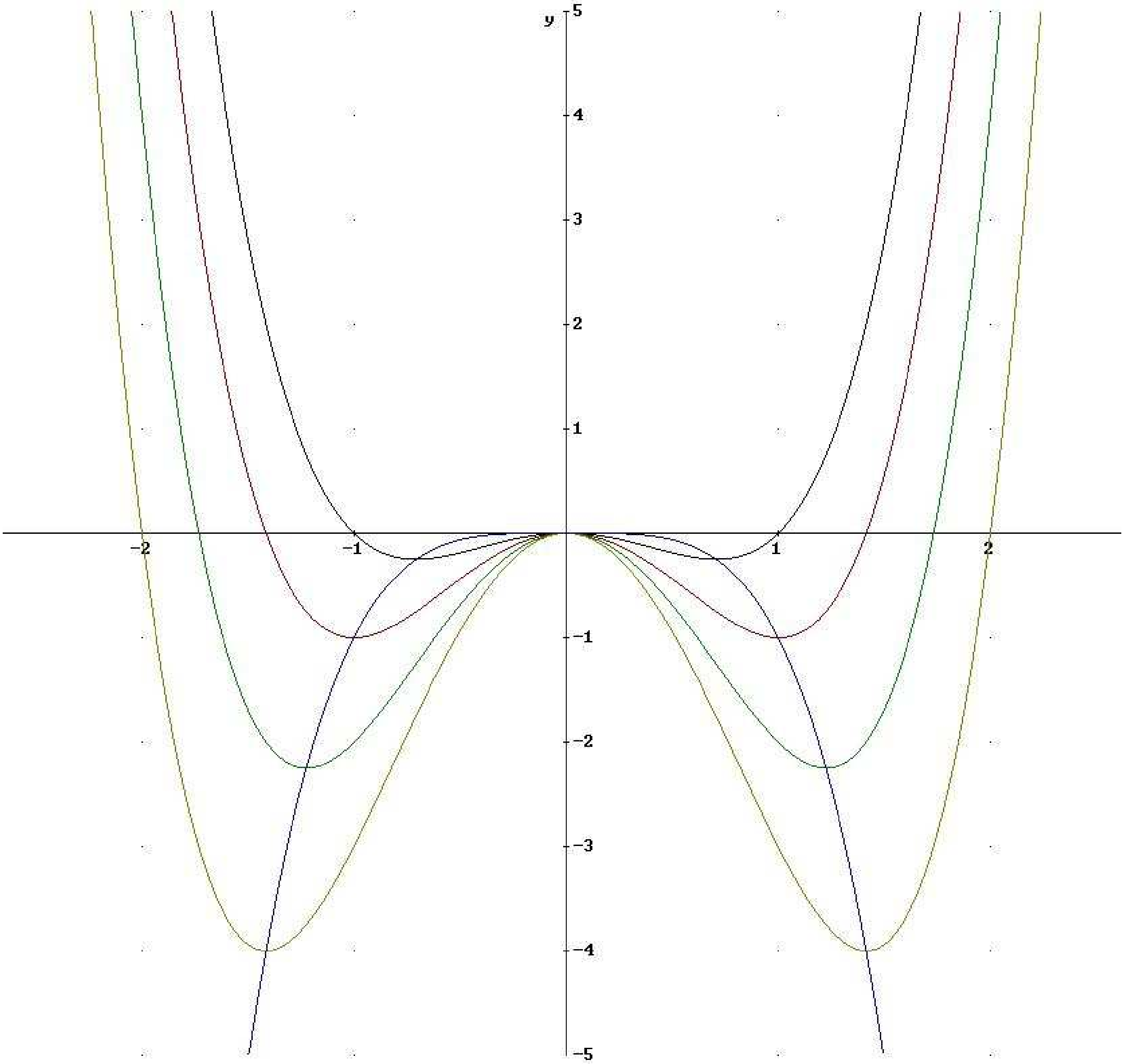
$$Ortskurve\ der\ Extrema:$$

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2k} \xrightarrow{\cdot 2} 2x = \sqrt{2k} \xrightarrow{quadrieren} 4x^2 = 2k \xrightarrow{:2} 2x^2 = k$$

$$y = -\frac{1}{4}k^2 \xrightarrow{k = 2x^2\ einsetzen} y = -\frac{1}{4}\left(2x^2\right)^2 \xrightarrow{ausrechnen} y = -x^4$$

$$Grenzwertverhalten:$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f_k(x) = \infty \quad \text{wegen der geraden Exponenten}$$


y
5
4
3
2
1
-2
-1
1
2
-1
-2
-3
-4
-5

4.) Parameter bei Funktionen

Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x) = tx^2 + x - \frac{2}{t} \quad mit\ t \neq 0$.

a) Bestimmen Sie t so, dass x = 1 eine Extremstelle der Funktion ist.

b) Um welche Art von Extremstelle handelt es sich?

<u>Lösung:</u>

Bestimmen Sie t so, dass x = 1 eine Extremstelle der Funktion ist.

$$f_t(x) = tx^2 + x - \frac{2}{t} \quad mit\ t \neq 0$$

$$f_t'(x) = 2tx + 1$$

$$f_t'(1) = 2t + 1 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$$

Um welche Art von Extremstelle handelt es sich?

$$f_t'(x) = 2tx + 1$$

$$f_t''(x) = 2t$$

$$f_t''\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 < 0 \Rightarrow Maximum$$