Ausgewählte Lösungen

zu Arbeitsblatt 3a: Stetigkeit und Differenzierbarkeit

(1) Ableitungen: Gib die Steigungen für $x_0 = 1$ an!

a) $f'(1) = 12$ b) $f'(1) = 1$ c) $f'(1) = -\frac{1}{5}$

d) $f'(1) = 1{,}2$ e) $f'(1) = 3c$ f) $f'(1) = 6b$

g) $f'(1) = a\cdot(2n-3)$ h) $f'(1) = 1$

i) $f'(1) = k$ j) $f'(1) = n+1$

k) $f'(1) = 0{,}54$ l) $f'(1) = 0{,}84a$

(2) Beweise die Ableitungen mit Hilfe des Differentialquotienten:

a) $f(x) = {}^1/_x$ b) $f(x) = \sqrt{x}$ c) $f(x) = 4x^2$

Direktes Nachrechnen durch Einsetzen in Defintion des Differentialquotienten

(3) Beweise oder widerlege die Aussage:

$f(x) = |x|$ ist für $x_0 = 0$ differenzierbar,

d.h. es existiert eine eindeutige Ableitung.

Direktes Nachrechnen durch Einsetzen in Defintion des Differentialquotienten

(4) Bestimme bei folgenden Kurven die Gleichungen der Tangenten und der Normalen im jeweiligen Punkt $P\ (x_0;y_0)$:

a) $f(x) = x^3$ $x_0 = -1$ **Lösung:** $t(x) = 3x+2$ $n(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$

b) $f(x) = {}^1/_8\, x^4$ $x_0 = -2$ **Lösung:** $t(x) = -4x-6$ $n(x) = \frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$

c) $f(x) = -0{,}4\,x^2$ $x_0 = 2$

Lösung: $t(x) = -1{,}6x + 1{,}6$ $n(x) = 0{,}625x - 2{,}9$

(5) In welchen Punkten haben die Funktionen mit den Gleichungen

$f(x) = x^3$ und $g(x) = {}^1/_2\, x^4$

die Steigungen 1 und 2 ?

Lösung: für f(x)

$m = 1: \quad x = \pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$

$m = 2: \quad x = \pm\frac{1}{3}\sqrt{6}$

Lösung: für g(x)

$m = 1: \quad x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$

$m = 2: \quad x = 1$

(6) Warum hat $y = x^3$ nie eine negative Steigung?

Lösung: Da die Ableitung vom Grad 2 ist kann $3x^2$ nie begativ werden.

(7) Welche Besonderheit besitzt die Steigung einer Gerade allgemein?

Lösung: konstante Steigung

Welche Konsequenzen ergeben sich daraus für die Ableitung?

Lösung: Die Ableitung entspricht der Steigung und ist eine Konstante.

Welche Steigung besitzen die 1. und die 2. Winkelhalbierende?

Lösung: $m_{1.\ \text{Winkelhalbierende}} = 1$ **und** $m_{2.\ \text{Winkelhalbierende}} = -1$

(8) Lege an die Kurve mit der Gleichung $y = {}^1/_8\, x^3$ Tangenten parallel zur Geraden $g(x) = 1{,}5\,x$.

Die Tangenten treffen die Kurve außer im Berührpunkt noch in jeweils einem anderen Punkt P.

Welches ist der geringste Abstand zwischen der Kurve und der Geraden?

Lösung: Tangenten:

$t_1(x) = \frac{3}{2}x - 2 \quad Punkt: P(2/1) \qquad t_2(x) = \frac{3}{2}x + 2 \quad Punkt: Q(-2/-1)$

Schnittpunkte: $S_1(4/8) \qquad S_2(-4/-8)$

Der Abstand muss über die Schnittpunkte der Normalen zwischen g(x) und y ermittelt werden:

$$n(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3} \quad \text{Schnittpunkt mit } g(x): \left(\frac{14}{13} / \frac{21}{13}\right)$$

Abstand:

$$e = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14/13 \\ 21/13 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(-\frac{8}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{208}{169}} \approx 1{,}109$$

(9) Bestimme die Tangente zur Funktion $f(x) = 2x^3 - 1$, die parallel zur Geraden $g(x) = 2x - 7$ verläuft.

Lösung:

$$t_1(x) = 2x - \frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} - 1 \quad Punkt: P\left(\sqrt{\frac{1}{3}} / \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} - 1\right)$$

$$t_2(x) = 2x + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} - 1 \quad Punkt: Q\left(\sqrt{\frac{1}{3}} / -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} - 1\right)$$

(10) Wie lautet die Tangentengleichung, wenn folgende beiden Angaben gemacht werden:

(i) $f(x) = x^2 - 1$

(ii) Normalengleichung: $n(x) = {}^7/_2 - {}^x/_4$

Wieviele Tangenten existieren eigentlich?
Wie groß ist der Neigungswinkel der gesuchten Tangente?

Lösung: $t(x) = 4x - 5 \quad Punkt: P(2/3)$

(11) Wie groß ist der geringste Abstand zwischen

a) den beiden Geraden $g(x) = 2x - 4$ und $h(x) = 6x + 1$?

Lösung: Abstand ist 0, da ein Schnittpunkt vorliegt.

b) der Parabel $f(x) = (x - 2)^2$ und der Geraden $g(x) = 3x - 10$?

Lösung: $e = \frac{7}{4} \cdot \sqrt{\frac{1}{10}} \approx 0{,}5534$

c) den beiden Geraden $g(x) = 4x - 3$ und $h(x) = 4x + 4$?

Lösung: $e = \sqrt{\frac{833}{289}} \approx 1{,}69775$