1 Einführung

1.1 Gleichungen und Gleichungssysteme

Arten von Gleichungen

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)	(F)
lineare Gleichungen/ Gleichungssysteme (LGS)	quadratische Gleichungen	Gleichungen vom Grad $n \geq 3$	Exponentiale Gleichungen	Wurzel-gleichungen	Logarithmus-gleichungen

1.1.1 LGS mit 2 Unbekannten

z. B. I. $x + 2y = 4$
II. $2x - y = 4$

Lösung per Einsetzverfahren

$y = 2x - 4$ ⇨ in I. einsetzen

→ $x + 2(2x - 4) = 4$
$x + 4x - 8 = 4$
$5x = 12$
$x = 2{,}4$ ⇨ für y in I. einsetzen

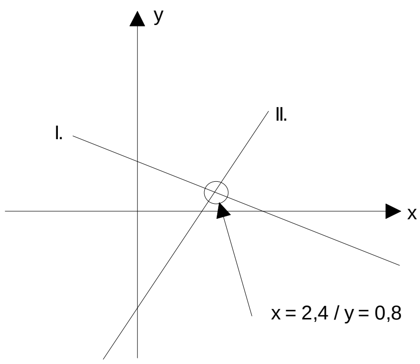
→ $y = 0{,}8$

Graphische Lösung

Auflösung nach y

$y = -\frac{1}{2}x + 2$
$y = 2x - 4$

Zeigen beide Graphen zwei parallele Geraden, so ist das Gleichungssystem ohne Lösung!



1.1.2 Quadratische Gleichungen

haben folgende Form

$$\boxed{ax^2 + bx + c = d \ [\text{mit } a \neq 0]}$$

Sie finden Verwendung bei der Nullstellenberechnung quadratischer Funktionen.

z. B. $2x^2 - 16x - 18 = 0$

Folgende Lösungsformeln stehen zur Verfügung:

1. ABC-Formel

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\boxed{a}\, x^2 + \boxed{b}\, x + \boxed{c} = 0$$
$$\boxed{2}\, x^2 \boxed{-16}\, x \boxed{-18} = 0$$

2. p/q-Formel (x muss hierbei alleine stehen!)

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x^2 + \boxed{p}\, x + \boxed{q} = 0$$
$$x^2 \boxed{-8}\, x \boxed{-9} = 0$$

Lösung nach ABC-Methode

$$x_{1/2} = \frac{16 \pm \sqrt{256 + 144}}{4}$$

$$x_{1/2} = \frac{16 \pm 20}{4}$$

$$x_1 = 9$$

$$x_2 = -1$$

Lösung nach p/q-Methode

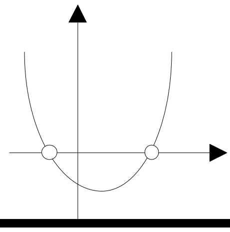
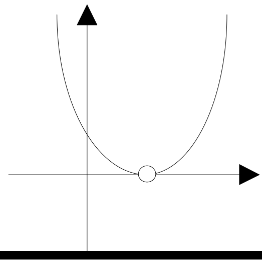
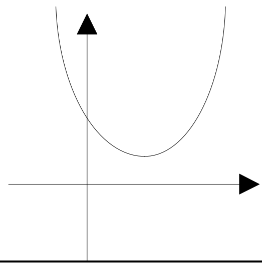
$$x_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16 + 9}$$

$$x_{1/2} = 4 \pm 5$$

$$x_1 = 9$$

$$x_2 = -1$$

1.1.2.1 Lösungsverhalten quadratischer Gleichungen

Fall	analytische Erklärung	graphische Erklärung
1	Diskriminante > 0 ⇨ $b^2 - 4ac > 0$ ⇨ 2 Lösungen zwei Nullstellen	
2	D = 0 ⇨ $b^2 - 4ac = 0$ ⇨ 1 Lösung eine Nullstelle	
3	D < 0 ⇨ keine Lösung keine Nullstellen	

Sonderfälle

Gleichungen, die sich auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen

I. $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$

Lösung per Substitution von $x^2 = u$

$$u^2 + 2u - 3 = 0$$

$$u_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1+3}$$

⇨ $$u_{1/2} = -1 \pm 2$$

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = -3$$

⇨ Resubstitution
u in I. einsetzen

$x^2 = -3$

$x = \sqrt{-3}$ nicht definiert!

$x^2 = 1$

$x = \pm\sqrt{1}$

$x_1 = 1$

$x_2 = -1$

II. $x + 4\sqrt{x} - 12 = 0$

Substitution:

$\sqrt{x} = u$

$u^2 + 4u - 12 = 0$

$u_{1/2} = u^2 + 4u - 12 = 0$

$u_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4 + 12}$

$u_{1/2} = -2 \pm 4$

$u_1 = 2$

$u_2 = -6$

Resubstitution

$u_1: \sqrt{x} = 2$

$u_2: \sqrt{x} = -6$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{4\}$

1.1.3 Gleichungen vom Grad $n \geq 3$

Form:

$$\boxed{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0}$$

wobei $n \in \mathbb{N}$

Beispiel: $3x^7+6x^6+...+3x+2=0$

Problematik: Keine Lösungsformeln!

Lösung durch Ausklammern
Iterationsverfahren (Annäherung)
Polynomdivision

I. $2x^4-4x^3=0$
$x^3(2x-4)=0$
$x^3=0$
$\Rightarrow x_1=0$

$2x-4=0$
$\Rightarrow x_2=2$

$\mathbb{L} = \{0;2\}$

II. $x^4-3x^3+3x^2-x=0$
$x(x^3-3x^2+3)=0$
$x(x^3-3x^2+3x-1)=0$
$\Rightarrow x_1=0$

Einer der Faktoren muss 0 sein, um die Gleichung zu erfüllen: x oder Term in Klammern

$x^3-3x^2+3x-1=0$
x=1 löst Gleichung
$\Rightarrow x-1=0$

1.1.3.1 Polynomdivision

$x^3-3x^2+3x-1 : x-1 = x^2-2x+1$
$\underline{-(x^3+x^2)}$
$-2x^2+3x-1$
$\underline{+2x^2-2x}$
$x-1$
$\underline{-(x+1)}$
0

$x^2-2x+1=0$

$x_{3/4} = 1 \pm \sqrt{1-1}$

$x_{3/4} = 1$

$\mathbb{L} = \{0;1\}$

Alternative zur Polynomdivision

1.1.3.2 Horner-Schema

	x^4	$-3x^3$	$+3x^2$	$-x$	$=0$
	1	-3	3	-1	0
x=0		0	0	0	0
	1	-3	3	-1	0

	x^3	$-3x^2$	$+3x$	-1	(=0)
	1	-3	3	-1	0
x=1		1	-2	1	
	1	-2	1	0	

← denken

$x^2 \quad -2x \quad +1 \quad =0$

1.1.4 Wurzelgleichungen

Wurzelgleichungen sind Gleichungen, bei denen die Lösungsvariable im Radikanten bzw. unter der Wurzel auftritt.
Daher muss immer der Definitionsbereich beachtet bzw. ermittelt werden.

DEFINITION

Radikant $\sqrt{x-1}$

Diskriminante = Radikant in quadratischer Gleichung

$$\left.\begin{array}{l}\text{1. Lösung der Wurzelgleichung} \\ \qquad + \\ \text{2. Bestimmung der Definitionsmenge}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Ermittlung der Lösungsmenge}$$

Beispiel

$$\sqrt{x-1}+1=x$$

Separieren:

$$\sqrt{x-1}=x-1 \quad \Big|^2$$

Radikant muss alleine stehen → quadrieren

$$x-1=x^2-2x+1$$

$$x^2-3x+2=0$$

$$x_1=2$$

$$x_2=1$$

Bestimmung des Definitionsbereichs

$x-1 \geq 0$
$x \geq 1$

$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 1\}$
$\mathbb{D} = [1;\infty[$

1.1.5 Exponentialgleichungen

Form

$$a \bullet b^x = c$$

Besonderheit: Variable als Hochzahl

Lösung erfolgt durch logarithmieren der Gleichung

$$b^x = \frac{c}{a}$$

$$\log_b b^x = \log_b \frac{c}{a}$$

$$x = \log_b \frac{c}{a}$$

Beispiel:

$5^x = 625$
$\log_5 5^x = \log_5 625$
$x = \log_5 625$
$x = 4$

1.1.6 Logarithmusgleichungen

Form

Argument

$$\log_a x = b$$

Die Lösung erfolgt durch Exponenzieren der Gleichung mit der entsprechenden Basis des jeweiligen Logarithmus.

Beispiel

I. $\ln(x+1)=2$

$e^{\ln(x+1)}=e^2$

$x+1=e^2$

$x=e^2-1 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L}=\{e^2-1\}$

II. $\lg(2x-1)=6$

$10^{\lg(2x-1)=}10^6$

$(2x-1)=10^6$

$x=\frac{1}{2}(10^6+1)$

1.2 Sonderzeichen der Mathematik

1.2.1 Summenzeichen

Es seien n Zahlen, die addiert werden sollen. Als Summe erhält man folgende Darstellung

$$\boxed{S = a_1+a_2+a_3+...+a_{n-1}+a_n = \sum_{I=1}^{n} a_i}$$

Wobei i einen Laufindex darstellt, für den nacheinander die Zahlen von der unteren bis zu oberen Grenze eingesetzt werden.

Beispiel

1: $\sum_{i=1}^{3} i = 1+2+3=6$

2: $\sum_{I=0}^{5} (2i+1) = 1+3+5+7+9+11=36$

3: $\sum_{I=1}^{7} (-1)^i = (-1)+1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)=-1$

1.2.2 Rechenregeln mit Summen

- unabhängige Konstante Faktoren

$$\boxed{\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} ca_i &= ca_1 + ca_2 + ca_3 + \ldots + ca_n \\ &= c(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) \\ &= c\sum_{i=1}^{n} a_i\end{aligned}}$$

- Zerlegung der Summe

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i}$$

Beispiel:

$$\sum_{i=1}^{3} (i^2 + 2i) = \sum_{i=1}^{3} i^2 + \sum_{i=1}^{3} 2i$$
$$= 14 + 12$$
$$= 26$$

- Verschiebung der Summationsgrenzen

$$\boxed{\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m-c}^{n-c} a_{i+c} = \sum_{i=m+c}^{n+c} a_{i-c}}$$

Beispiel:
$c = 2$

$$\sum_{i=1}^{3} 2i = \sum_{i=-1}^{1} 2(i+2)$$

- Sonderfall - Summe ohne Index

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} c = c + c + c + \ldots + c = n \bullet c}$$

Beispiel

$$\sum_{i=1}^{10} 5 = 10 \bullet 5 = 50$$

- Anwendung des $\sum$-Zeichens

Addition der ersten und natürlichen Zahlen

Beispiel: n = 10

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

11
11
11
11
11

$$\boxed{\text{Gauß: } \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Beispiel:
Summe der Zahlen von 4 bis 50

1. Lösungsmöglichkeit

$$\frac{50 \cdot 51}{2} - \frac{3 \cdot 4}{2} = 1275 - 6 = 1.269$$

2. Lösungsmöglichkeit
vgl. Gaußverfahren von oben

4 5 6 7 8 ... 46 47 48 49 50

54
54
54
54
54

$$\frac{54 \cdot (50-3)}{2} = 27 \cdot 47 = 1.269$$

3. Lösungsverfahren

4 5 6 7 8 9 10 11 ... 19 20 21 ... 29 30 31 ... 39 40 41 ... 50

$$\sum_{i=4}^{9} i + 10\cdot 10 + \sum_{i=1}^{9} i + 10\cdot 20 + \sum_{i=1}^{9} i + 10\cdot 20 + \sum_{i=4}^{9} i + \ldots + 10\cdot 40 \sum_{i=1}^{9} i + 50$$
$$= \sum_{i=4}^{9} i + 10(10+20+30+40) + 4\sum_{i=4}^{9} i + 50$$
$$= 39 + 1.000 + 180 + 50 = 1.269$$

1.2.3 Produktzeichen

Π

$$\boxed{P = a_1 \bullet a_2 \bullet a_3 \bullet \ldots a_{n-1} \bullet a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i}$$

Beispiele

$$\prod_{i=1}^{3} (2i) = 2 \bullet 4 \bullet 6 = 48$$
$$\prod_{i=0}^{4} i = 0$$
$$\prod_{i=0}^{4} (i+1) = 1 \bullet 2 \bullet 3 \bullet 4 \bullet 5 = 120$$

1.2.4 Fakultät

!

= Produkt der ersten n natürlichen Zahlen

n!

Besonderheit

0!=1

Beispiele
2!= 1•2=2
3!= 1•2•3=6
4!= 1•2•3•4=24

1.3 Binomischer Lehrsatz

$(a+b)^{10}$ = ? → Hochzahlen
→ Koeffizienten

Beispiel:
$(a+b)^2 = \mathbf{1}a^2 + \mathbf{2}ab + \mathbf{1}b^2$

Koeffizienten

Koeffizienten

$(a+b)^0 = 1$ — 1

$(a+b)^1 = 1a + 1b$ — 1 1

$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + b^2 \quad \Leftrightarrow$ — 1 2 1

$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$ — 1 3 3 1

$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$ — 1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

$(-a+b)^4 = 1(-a)^4 + 4(-a)^3b + 6(-a)^2b^2 + 4(-a)b^3 + 1b^4$
$\qquad = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

$$(a+b)^{-4} = \frac{1}{(a+b)^4}$$

Ermittlung von Koeffizienten im Pascalschen Dreieck

	Spalte	Spalte 1	Spalte 2	Spalte 3	Spalte 4	Spalte 5
Zeile 0	1					
Zeile 1	1	1				
Zeile 2	1	2	1			
Zeile 3	1	3	3	1		
Zeile 4	1	4	6	4	1	
Zeile 5	1	5	10	10	5	1

n

k

$$\text{Positionsangabe} = = \binom{\text{n-te Zeile}}{\text{k-te Spalte}} = \binom{n}{k}$$

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Beispiele

$$\binom{3}{1} = \frac{3!}{1!(3-1)!} = \frac{6}{1\cdot 2} = 3$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2!} = 10$$

$$\binom{3}{4} = \frac{3!}{4!(3-4)!} = \text{nicht definiert}$$

$$(a+b)^{10} = \binom{10}{0}a^{10} + \binom{10}{1}a^9b^1 + \binom{10}{2}a^8b^2 + \binom{10}{3}a^7b^3 + \binom{10}{4}a^6b^4 + \ldots + \binom{10}{9}ab^9 + \binom{10}{10}b^{10}$$

Binomischer Lehrsatz

$$\boxed{\Rightarrow (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k}$$

Beispiel

$$(x+2)^5 = \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}x^{5-k}2^k$$

$$= \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4 \cdot 2 + \binom{5}{2}x^3 \cdot 2^2 + \binom{5}{3}x^2 \cdot 2^3 + \binom{5}{4}x \cdot 2^4 + \binom{5}{5}2^5$$

$$= x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$$