2 Lineare Gleichungssysteme

2.1 Homogene und inhomogene lineare Gleichungssysteme

DEFINITION

Die Gesamtheit von m linearen Gleichungen eines Systems heißt LGS mit m Gleichungen und n Variablen. Ist dabei die rechte Seite 0 (d. h. b_i=0,i=1,2,3,...,m) spricht man von einem homogenen System.

$$\text{m Gleichungen}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Beispiel homogenes System

$$\begin{aligned} x_1+x_2-x_3&=0 \\ 3x_1-x_2-x_3&=0 \\ -2x_1+6x_2-2x_3&=0 \end{aligned}$$

2.1.1 Lösung linearer Gleichungssystem mit dem Gauß-Alogrithmus.

Bei diesem Verfahren werden zur Lösung nur die Koeffizienten herangezogen.

$$\begin{array}{lccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & \\ \text{I.} & 1 & 1 & -1 & 0 \\ \text{II.} & 3 & -1 & -1 & 0 \\ \text{III.} & -2 & 6 & -2 & 0 \end{array} \xrightarrow{\text{II}-3\cdot\text{I}} \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 & 0 \end{array} \xrightarrow{\text{III}+2\cdot\text{I}} \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & -4 & 0 \end{array} \xrightarrow{\text{III}+2\,\text{II}} \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow \text{I.}\, x_1 + x_2 - x_3 = 0$

$\text{II.} -4x_2 + 2x_3 = 0 \,|\, \div 2$

$-2x_2 + x_3 = 0$

$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}x_3$

$x_1 = x_3 - x_2$

$x_1 = x_3 - \frac{1}{2}x_3$

$= \frac{1}{2}x_3$

$|L = \left\{\frac{1}{2}x_3; \frac{1}{2}x_3; x_3\right\}$

$\Rightarrow$ unendlich viele Lösungsmöglichkeiten

z. B. $x_3 = 2 \Rightarrow |L = \{1;\ 1;\ 2\}$

2.1.2 Lösung inhomogener Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} x_1 &+3x_2 &+4x_3 &= 8 \\ 2x_1 &+9x_2 &+14x_3 &= 25 \\ 5x_1 &+12x_2 &+18x_3 &= 39 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll|l} \text{I.} & 1 & +3 & +4 & =8 \\ \text{Ii.} & 2 & +9 & +14 & =25 \\ \text{III.} & 5 & +12 & +18 & =39 \end{array} \xrightarrow{\text{II.}-2\text{I.}} \begin{array}{llll|l} \text{I.} & 1 & +3 & +4 & =8 \\ \text{Ii.} & 0 & +3 & +6 & =9 \\ \text{III.} & 5 & +12 & +18 & =39 \end{array} \xrightarrow{\text{II}-5\text{I}}$$

$$\begin{array}{llll|l} \text{I.} & 1 & +3 & +4 & =8 \\ \text{Ii.} & 0 & +1 & +2 & =3 \\ \text{III.} & 0 & -3 & -2 & =-1 \end{array} \xrightarrow{\text{III.}+3\text{II.}} \begin{array}{llll|l} \text{I.} & 1 & +3 & +4 & =8 \\ \text{Ii.} & 0 & +1 & +2 & =3 \\ \text{III.} & 0 & 0 & 4 & =8 \end{array}$$

$4x_3 = 8$

$x_3 = 2$

$x_2 + 2x_3 = 3$

$x_2 + 4 = 3$

$x = -1$

$x_1 + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot (2) = 8$

$x_1 - 3 + 8 = 8$

$x_1 = 3$

$x_1 = 3; x_2 = -1; x_3 = 2$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{3;\ -1;\ 2\}$