3 Matrizen, Vektoren und Determinanten

3.1 Matrix

DEFINITION

Unter einer mxn-Matrix versteht man ein rechteckiges Zahlenschema aus m Zeilen und n Spalten.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{3k} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die $a_{iK} \in$ |R heißen Elemente der Matrix, wobei i = Zeile und k = Spalte darstellt.

Besondere Arten von Matrizen

3.1.1 Nullmatrix

Es gilt für alle a_{iK}=0

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

3.1.2 Quadratische Matrix

Es gilt: Zeilenanzahl = Spaltenanzahl

3.1.3 Diagonale Matrix

Quadratische Matrix, bei der bis auf die Diagonale nur Nullen stehen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3.1.4 Einheitsmatrix

Diagonale Matrix, bei der nur 1 auf der Diagonalen stehen (z. B. E_4=Einheitsmatrix mit vier Zeilen und vier Spalten)

$$E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.1.5 Transponierte Matrix

Entsteht durch Vertauschen von Zeilen und Spalten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Transposition}} A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Durch zweimaliges transponieren erhält man die Ursprungsmatrix: $\left(A^T\right)^T = A$

3.1.6 Symmetrische Matrix

Quadratische Matrix, für die gilt A^T=A

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&7&4\\3&4&8\end{pmatrix}\rightarrow A^T=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&7&4\\3&4&8\end{pmatrix}$$

3.2 Rechenoperationen mit Matrizen

3.2.1 Addition/Subtraktion

Zwei Matrizen gleichen Typs werden addiert bzw. subtrahiert, indem man die einzelnen Elemente addiert bzw. subtrahiert.

$$\boxed{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e&f\\g&h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+e&b+f\\c+g&d+h\end{pmatrix}}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix}2&-4\\3&-1\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0\\-1&3\\2&-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&3\\2&0\\-3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&-1\\4&2\\-1&-5\end{pmatrix}$$

3.2.2 Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar (= reelle Zahl)

Jedes Element der Matrix wir mit dem Skalar multipliziert.

$$\boxed{t\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ta&tb\\tc&td\end{pmatrix}}$$

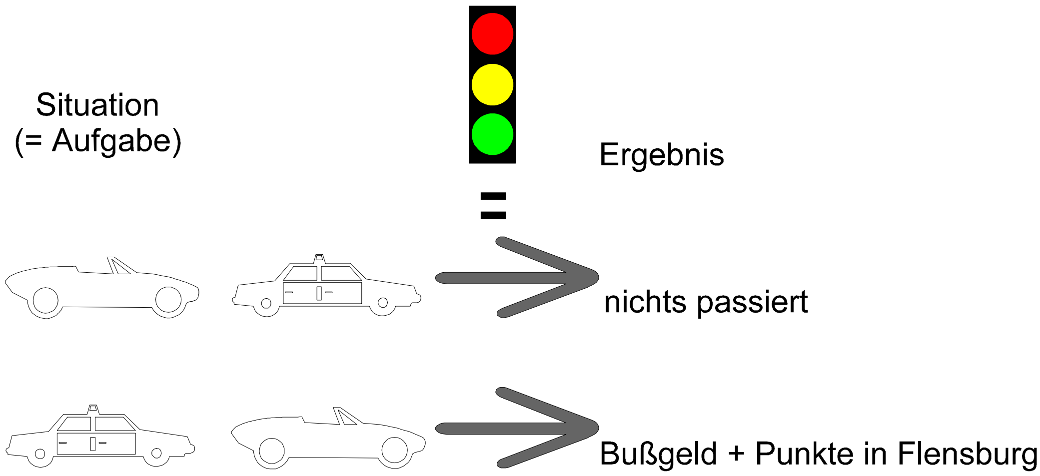
Beispiel:

$$\begin{pmatrix}2&-4\\3&-1\\0&1\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}2&0\\-1&3\\2&-4\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}4&3\\2&0\\-3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&5\\11&-7\\-13&3\end{pmatrix}$$

3.2.3 Multiplikation von zwei Matrizen

Voraussetzung: Spaltenanzahl der 1. Matrix muss gleich der Zeilenanzahl der 2. Matrix sein. Es gilt im allgemeinen nicht das Kommutativgesetz (A•B≠B•A).

Anmerkung zum Kommutativgesetz
Unter dem Kommutativgesetz in der Mathematik versteht man die Tatsache, dass die Reihenfolge der Rechenoperatoren beliebig vertauschbar ist. So ist die Addition kommutativ (A + B = B + A); die Multiplikation im Regelfall aber nicht.
Vergleichbar ist dieses Gesetz auch mit alltäglichen Situationen im Straßenverkehr: So ist es unterschiedlich zu bewerten, d. h. das Ergebnis wird variieren, wenn man direkt vor einer Polizeistreife über die rote Ampel fährt oder ob man dies hinter dem Polizeiwagen tut. Denn es gilt:



Da es zu verschiedenen Ergebnissen führt ist die Reihenfolge nicht vertauschbar - also gilt das Kommutativgesetz nicht.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

A · B

			B	
			1	3
			1	1
			2	1
1	2	3	9	8
2	1	1	5	8
	A			

			B	
			g	h
			i	j
			k	l
a	b	c	ag+bi+ck	ah+bj+cl
d	e	f	dg+ei+fk	dh+ej+fl
	A			

Bei der Multiplikation einer Einheitsmatrix mit einer 2. Matrix ist das Ergebnis gleich der zweiten Matrix. Es gilt das Kommutativgesetz (E•A=A•E).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_2 \cdot A = A$

		B	
		1	0
		1	1
1	0	1	0
0	1	1	1
A			

3.2.4 Invertierung von Matrizen

Zur Lösung von Matrizengleichungen

zum Vergleich:

Lineare Gleichung

$$2x = 4 \,\Big|\, \cdot \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2} \cdot 2x = \frac{1}{2} \cdot 4$$
$$2^{-1} \cdot 2x = 2^{-1} \cdot 4$$
$$x = 2$$

Matrizengleichung

$$AX = B \,\Big|\, \cdot A^{-1}$$
$$A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B$$
$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$$
$$X = A^{-1} \cdot B$$

3.2.4.1 Ermittlung der Inversen

Erlaubte Rechenoperationen mit den Zeilen der Matrix (=Elementare Zeilenumformung):
1. Addition/Subtraktion einer Zeile mit dem Vielfachen einer anderen Zeile
2. Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl $c \in \mathbb{R}$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & \\ \text{II.} & \end{array} \left.\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{II-2I} \left.\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{array} \xrightarrow{I+2II} \left.\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array}\right| \begin{array}{cc} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{array} \xrightarrow{II(-1)} \left.\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{cc} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{array}$$

Idee: $A|E \rightarrow E|A^{-1} \Rightarrow A \bullet A^{-1} = E$

Das Kommunikativgesetz gilt für die Multiplikation einer Matrix mit ihrer Inversen ($A \bullet A^{-1} = A^{-1} \bullet A = E$).

$$\begin{aligned} A|E \quad & \Big| \cdot A^{-1} \\ A \cdot A^{-1}|E \cdot A^{-1} & \\ E|A^{-1} & \end{aligned}$$

Alternative:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(a)} \cdot \operatorname{adj}(A)$$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} +\det A_{11}^T & -\det A_{12}^T & +\det A_{13}^T \\ -\det A_{21}^T & +\det A_{22}^T & -\det A_{23}^T \\ +\det A_{31}^T & -\det A_{32}^T & +\det A_{33}^T \end{pmatrix}$$

3.3 Vektor - Sonderform der Matrix

DEFINITION

Besteht eine Matrix aus 1 Zeile oder einer Spalte, dann bezeichnet man diese als Vektor.

($m \bullet 1$)-Matrix = Spaltenvektor

($1 \bullet m$)-Matrix = Zeilenvektor

Zudem gilt: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Berechnung der Länge eines Vektors

$$l = \sqrt{a^2 + b^2}$$

3.4 Matrizengleichungen

Erlaubt sind folgende Rechenoperationen
- Addition (kommutativ!)
- Subtraktion
- Multiplikation

Die Lösung erfolgt wie bei linearen Gleichungen

Gleichungstypen

$$2 - X = A$$

I. $\quad X = 2 - A$

$$X = 2 \cdot E_n - A$$

II.

$$
\begin{aligned}
XA - 1 &= B \\
XA &= B + 1 \cdot E_n \quad / \cdot A^{-1} \\
XA \cdot A^{-1} &= (B + E_n) \cdot A^{-1} \\
X &= (B + E_n) \cdot A^{-1}
\end{aligned}
$$

III.

$$
\begin{aligned}
AX - B(X - C) + 2 &= BX \\
AX - 2\,BX &= -BC - 2 \\
(A - 2B)X &= -BC - 2E_n \qquad |\cdot (A - 2B)^{-1} \\
X &= (A - 2B)^{-1} \cdot (-BC - 2E_n)
\end{aligned}
$$

3.5 Determinante

DEFINITION

Abbildung einer Matrix A auf eine reelle Zahl C nach einer bestimmten Abbildungsvorschrift. (Nur mit quadratischen Matrizen möglich)

Det: A → C

3.5.1 Berechnung von Determinanten

3.5.1.1 2x2-Matrix

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Det}(A) = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = (-2)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Det}(B) = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 1$$

3.5.1.2 3x3-Matrix

hier: Entwicklung nach der 1. Spalte

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Det}(A) &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot (1 \cdot 2 - 1 \cdot 0) - (-2) \cdot (2 \cdot 2 - 1 \cdot 3) + (-3) \cdot (2 \cdot 0 - 1 \cdot 3) \\
&= 2 + 2 + 9 = 13
\end{aligned}
$$

Alternative Berechnung bei 3x3 – Matrizen (Sarrus – Regel)

$$
\begin{array}{ccc|cc}
1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\
-2 & 1 & 0 & -2 & 1 \\
-3 & 1 & 2 & -3 & 1
\end{array}
\Rightarrow 1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \cdot (-3) + 3 \cdot (-2) \cdot 1 - (-3) \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) \cdot 2
$$

$$= 2 + 0 - 6 + 9 - 0 + 8 = 13$$

3.5.1.3 Höherwertige Matrizen

hier: Entwicklung nach einer beliebigen Spalte oder Zeile nach einem sich stetig fortsetzenden Vorzeichenschema

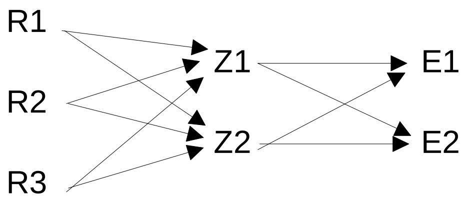
$$\begin{pmatrix} + & - & + & \Lambda \\ - & + & - & \Lambda \\ + & - & + & \Lambda \\ - & + & - & \Lambda \\ + & - & + & \Lambda \\ - & + & - & \Lambda \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{O} \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe der Determinante läßt sich prüfen, ob die Matrix invertierbar ist

Det(A) ≠ 0 ⇨ A ist invertierbar
Det(A) = 0 ⇨ A ist nicht invertierbar

3.6 Ökonomische Anwendung zu Matrizen

3.6.1 Verbrauchsrechnung: Rohstoffe → Zwischenprodukte → Endprodukte



Matrixform des Verbrauchs

R-Z-Matrix

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	4	3	3
R_2	2	4	6
R_3	1	7	4
R_4	3	3	0

Z-E-Matrix

	E_1	E_2
Z_1	6	5
Z_2	4	3
Z_3	1	2

Wieviel Einheiten des jeweiligen Rohstoffes sind zur Herstellung der Endprodukte erforderlich?

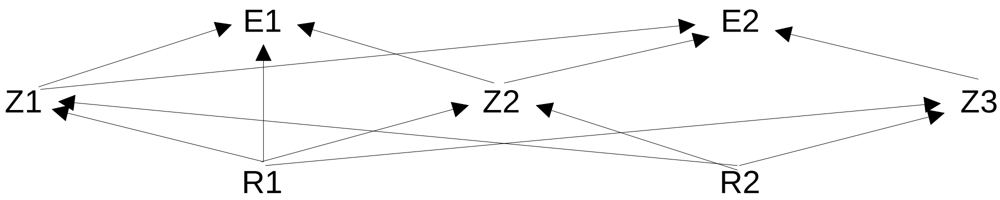
$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & E_2 \\ 39 & 35 \\ 34 & 34 \\ 38 & 34 \\ 30 & 24 \end{pmatrix}$$

Die Ergebnismatrix gibt den Bedarf an $R_1 - R_4$ für je eine ME von E_1 bzw. E_2 an.

E_1: 100 Stück; E_2: 200 Stück

$$100 \cdot \begin{pmatrix} 39 \\ 34 \\ 38 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3900 \\ 3400 \\ 3800 \\ 3000 \end{pmatrix}; \qquad 200 \cdot \begin{pmatrix} 35 \\ 34 \\ 34 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7000 \\ 6800 \\ 6800 \\ 4800 \end{pmatrix} \Rightarrow \qquad \text{Gesamtbedarf} = \begin{pmatrix} 10900 \\ 10200 \\ 10600 \\ 7800 \end{pmatrix}$$

3.6.2 Verbrauchsrechnung: Rohstoffe gehen auch direkt in das Endprodukt ein



Rohstoff-Matrix

	Z_1	Z_2	Z_3	E_1	E_2
R_1	2	3	4	2	0
R_2	3	7	2	0	0

Z-E-Matrix

	E_1	E_2
Z_1	5	5
Z_2	4	3
Z_3	0	10

Annahme: von E_1 werden 100 Stück und von E_2 150 Stück gefertigt:

Lösung

$E_1 = 100$
$E_2 = 150$
$Z_1 = 5E_1 + 5E_2$
$Z_2 = 4E_1 + 3E_2$
$Z_3 = 10E_2$
$R_1 = 2Z1 + 3Z_2 + 4Z_3 + 2E_1$
$R_2 = 3Z1 + 7Z_2 + 2Z_3$

Lösung durch Einsetzen: $R_1 = 11.250$; $R_2 = 12.700$