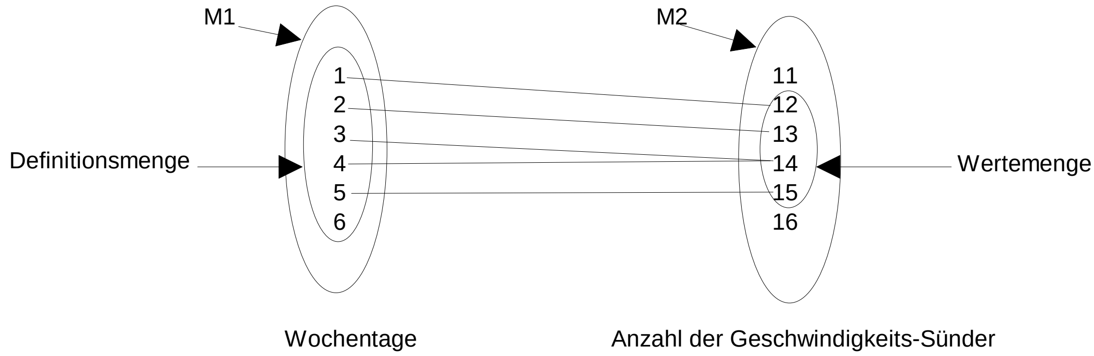
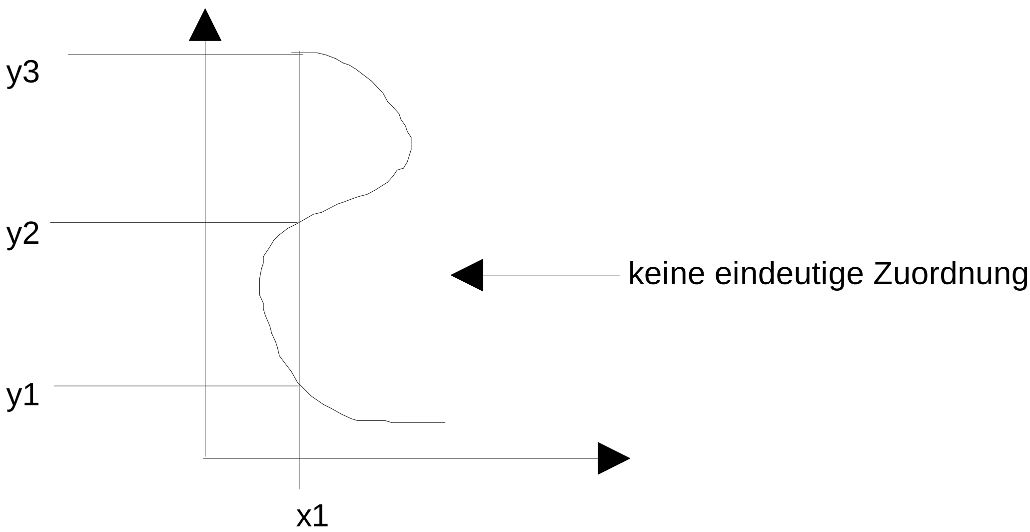
4 Reelle Funktionen in einer Veränderlichen

4.1 Definition

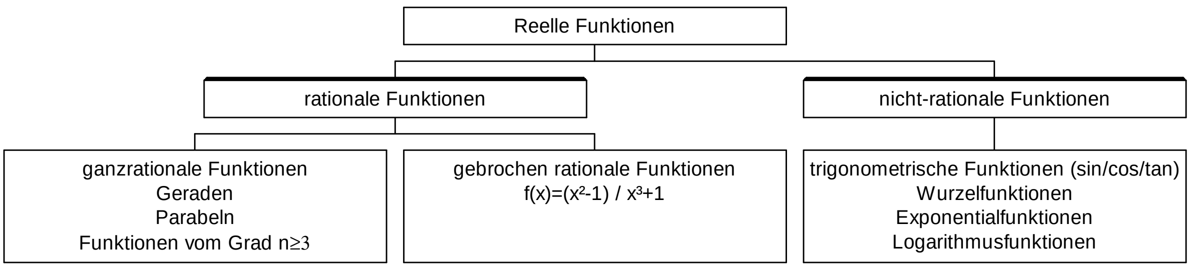
Es seien M_1und M_2 zwei Mengen reeller Zahlen. Ordnet man jedem Element $x_1 \in M_1$ durch eine Zuordnungsvorschrift f genau ein Element $y \in M_2$ zu, so nennt man die Zuordnungsvorschrift eine Funktion f.



Wesentlich ist die Eindeutigkeit der Zuordnung, d. h. $x_1 \rightarrow y_1$.



4.2 Einteilung von Funktionen



4.2.1 Geraden

Form

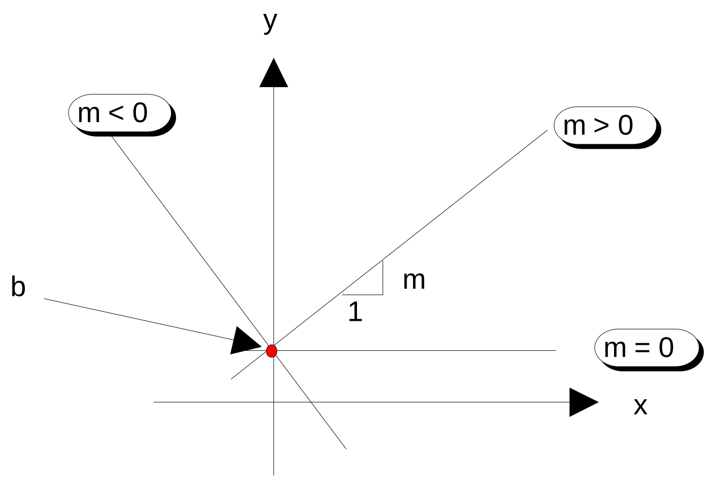
$$\boxed{y = mx + b}$$

Funktionsvorschrift

$g(x) = mx + b$

m = Steigungsfaktor / b = y-Achsenabschnitt

$m > 0$ ⇨ g steigt
$m < 0$ ⇨ g fällt (negative Steigung)
$m = 0$ ⇨ g ist konstant



Ermittlung einer Geradengleichung

Benötigt werden folgende Angaben

- 2 Punkte oder 1 Punkt und die Steigung

I) $P_1(1|1)$; P_2 $(2|4)$

$\boxed{P_n(x|y)}$

$g(x) = mx + b \rightarrow y = mx + b$

$1 = m \bullet 1 + b$ ⇨ $b = 1 - m$
$4 = m \bullet 2 + b$ ⇨ $4 = 2m + (1 - m)$
⇨ $m = 3$
⇨ $g(x) = 3x - 2$

II) $P_1(1|4)$; $m = -2$

$g(x) = mx + b \rightarrow y = mx + b$

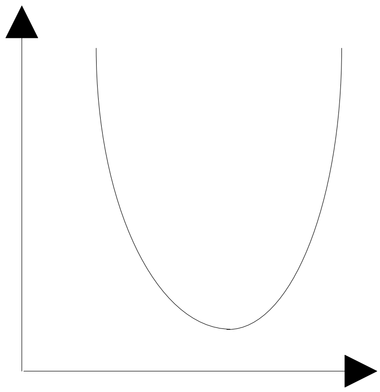
$4 = - 2 \bullet 1 + b$ ⇨ $b = 6$
⇨ $g(x) = -2x + 6$

Exkurs
Steigungen graphisch
$-2x$ = 2 nach unten; 1 nach rechts
$5\,x$ = 5 nach oben; 1 nach rechts
$-½x$= -1 nach unten; 2 nach rechts

4.2.2 Quadratische Funktionen (Graph: Parabel)

Funktionsvorschrift

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$$



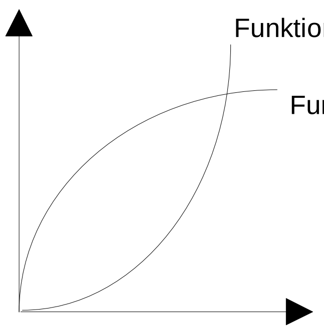
a > 0 ⇨ (f(x) nach oben geöffnet
a < 0 ⇨ f(x) nach unten geöffnet
|a| = 1 ⇨ Normalparabel
|a| < 1 ⇨ Parabel wird breiter
|a| >1 ⇨ Parabel wird enger

f(x) kann maximal 2 Nullstellen haben!

4.2.3 Wurzelfunktionen bzw. Funktionen mit Exponent ∈ Q

Funktionsvorschrift

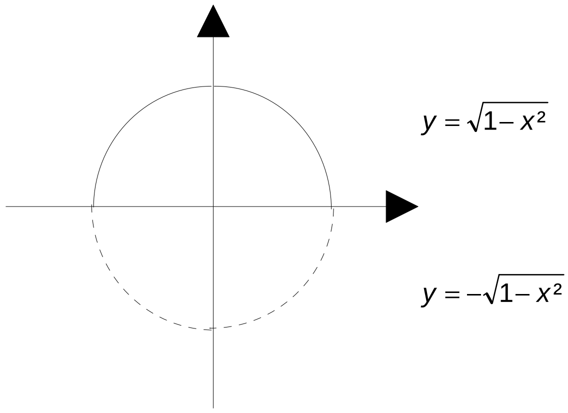
$$\boxed{f(x) = \sqrt[n]{x^a} = x^{\frac{a}{n}}}$$



Exponent < 1 ⇨ abnehmende Steigung
Exponent > 1 ⇨ zunehmende Steigung

Beispiel: Kreisfunktion
Häufige Darstellungsform ist die Implizite Darstellung (= die Funktion ist nicht nach y aufgelöst).

$x^2 + y^2 = 1$
$y^2 = 1 - x^2$
$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ (= Kreis mit Radius 1)



Beispiel:
Schnittpunkte zwischen Parabeln

P(x) = 1200 - 0,2x
K(x) = 0,2x² + 500.000

Frage: Ab bzw. bis zu welcher Produktionsmenge liegt der Produzent in der Gewinnzone? (x = Menge)

Gewinn (G) = Erlös - Kosten
G = p • x - K
G = (1200 - 0,2x)x - 0,2x² - 500.000
→ -0,2x² - 1200x - 0,2x² - 500.000
→ -0,4x² + 1200x - 500.000
0 = -0,4x² + 1200x - 500.000 | :(-0,4)
→ x² - 3.000x + 1.250.000 Lösung durch p/q-Formel

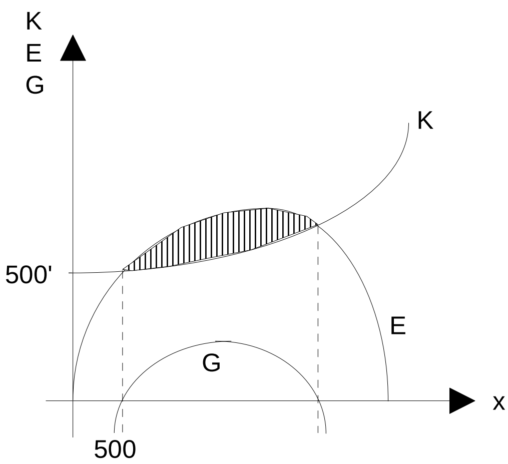
$x_{1/2} = +1500 \pm \sqrt{2.250.000 - 1250.000}$

$x_{1/2} = +1500 \pm 1000$

$x_1 = +500$

$x_2 = +2.500$

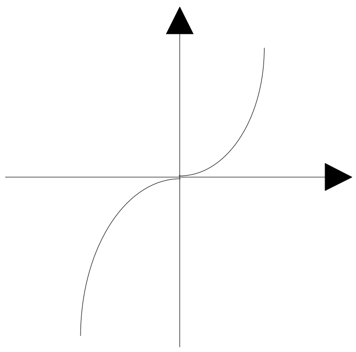
$G = \{x | x \in |R \wedge E(x) > K(x)\}$



4.2.4 Funktionen vom Grad $n \geq 3$

Funktionsvorschrift

$$\boxed{f(x) = x^n}$$

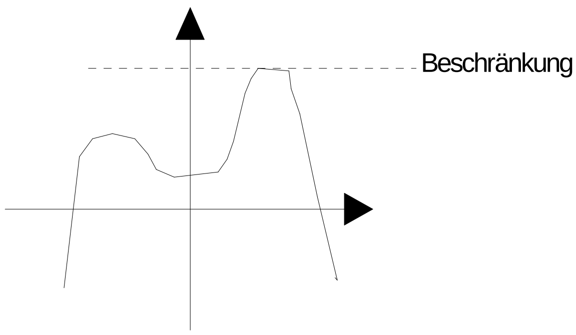


Eigenschaften

(1) hat höchstens n-Nullstellen

(2) n = ungerade ⇨ f(x) hat mindestens 1 Nullstelle

n = gerade ⇨ f(x) ist einseitig beschränkt (nach oben oder nach unten)



4.2.5 Exponentialfunktion

Form

Exponent

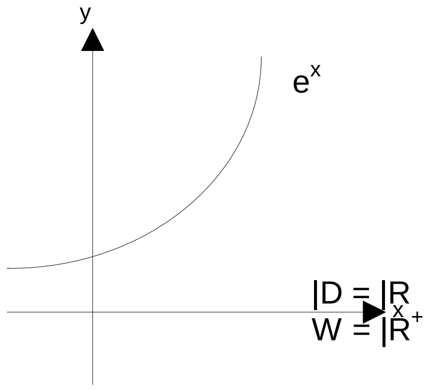
$$\boxed{f(x) = a^x}$$

Basis

häufigste Form:
⇨ $f(x) = e^x$

Eulersche Zahl e = 2,71

Beispiel:
$f(x) = 2e^{3x} + 1$



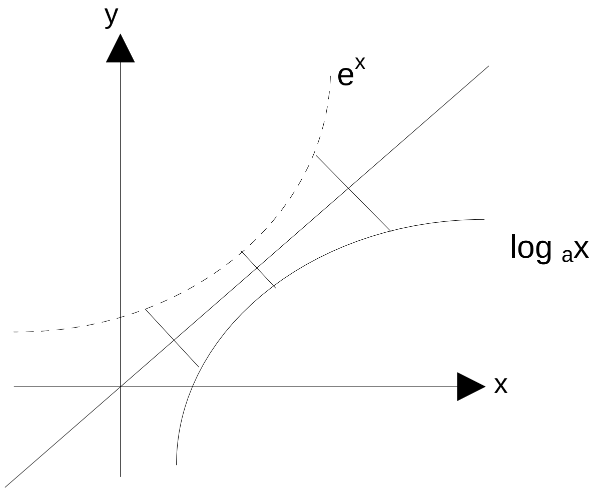
4.2.6 Logarithmusfunktion (= Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion)

Form

$$\boxed{\mathbf{f(x) = \log_a x}}$$

Werte für die Funktion sind nur definiert, wenn das Argument des Logarithmus größer ist als 0.

Beispiel:
$f(x) = \log_a (x + 2)$ → Argument $(x+2) > 0$



Nullstelle bei Logarithmus-Funktionen:

Idee:
$f(x) = 0$ oder
Argument $(f(x)) = 1$ wegen: $\log_a 1 = 0$
denn es gilt immer $a^0 = 1$

Beispiel:
$\log_a(x + 2) = 0$
$a^{\log_a (x + 2)} = a^0$ $\quad$ $a^0 = 1$
$x + 2 = 1$
$x = -1$

4.3 Grenzwerte für x → ± ∞

f(x) = 2x² - x

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(2x^2 - x) = 2\infty^2 - x = \infty$$

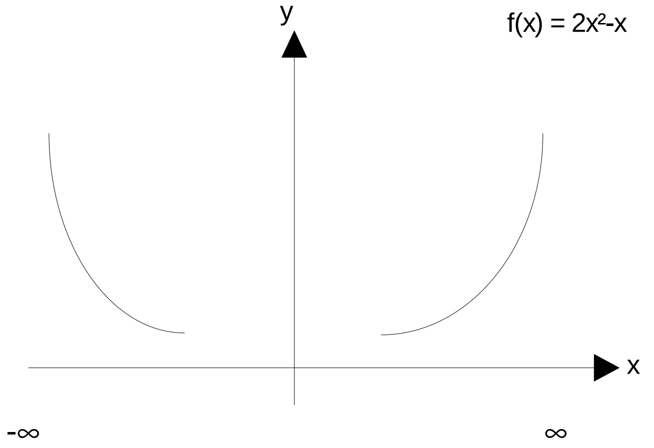
$$= \lim_{x\to\infty} x(2x-1) = \infty(2\infty - 1) = \infty$$

Problemstellung: Wie verhält sich die Funktion beim Einsetzen kleiner x-Werte?

f(x) = 2x² - x

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(2x^2 - x) = 2\infty^2 - x = \infty$$

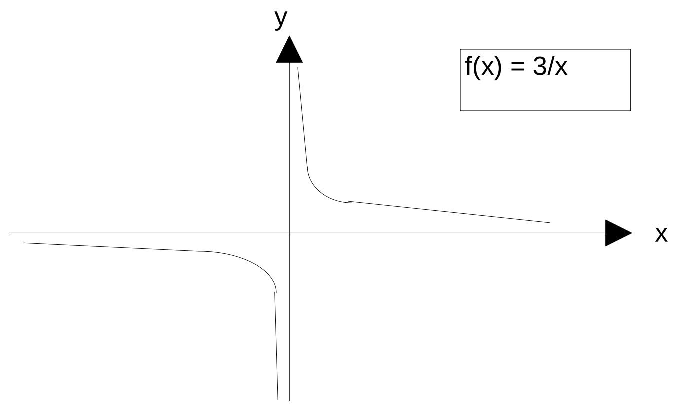
$$= \lim_{x\to-\infty} x(2x-1) = -\infty(-2[-\infty]+1) = (-\infty)(-\infty) = \infty$$



Beispiel:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{3}{x} = \frac{3}{\infty} \to 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x} = \frac{3}{-\infty} \to 0$$



Bei Potenzfunktionen $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x_i$ genügt eine Grenzwertbetrachtung für x⇨±∞ für den Teil der Funktion mit dem größten Exponenten.

Beispiel:
$f(x) = 4x^7 - x^6 + x^5 - 3x^2$ einsetzen bei $4x^7$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \approx 4\infty^7 = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \approx 4(-\infty)^7 = -\infty$

Weitere Grenzwertermittlungsverfahren vgl. Regel von L'Hospital