5 Differentialrechnung in einer Veränderlichen

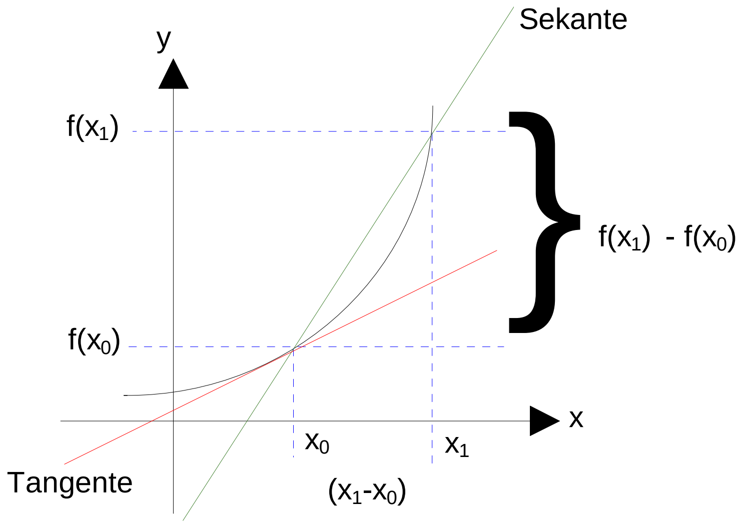
5.1 Differentiation elementarer Funktionen

5.1.1 Begriff der Ableitung

Hierbei wird die Frage nach der Steigung in einem Punkt behandelt
⇨ Ausgangsidee: Unterscheidung zwischen Durchschnitts- und Momentangeschwindigkeit

DEFINITION

Sekante	durchschnittliche Steigung
Tangente	Steigung in einem Punkt; berührt die Funktion nur noch in diesem Punkt



Die Strecke zwischen x_0 und x_1 sei h cm lang. Daher gilt auch: $x_1 = x_0 + h$

$$\text{Sekantensteigung: } m_s = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\text{Tangentensteigung: } m_t = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0}$$

$$m_t = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$= f'(x_0)$$

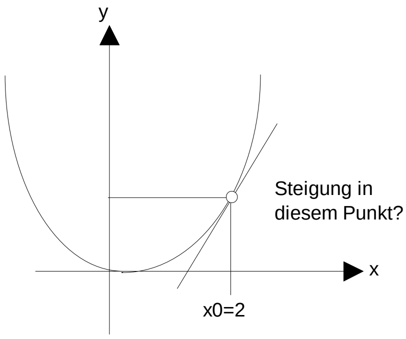
geometrische Erklärung:
Die 1. Ableitung f'(x) beschreibt die Steigung der Funktion bzw. die der Tangentensteigung in x_0.

⇨ $$\boxed{m = f'(x)}$$

Steigung

Beispiel:

$f(x) = \frac{1}{2} x^2$
$m = f'(x)$
$f'(x) = x$
$f`(2) = 2$



5.2 Ableitungsregeln

5.2.1 <u>Grundlegende Ableitungstechniken für alle Funktionen folgender Form</u>

$$\boxed{\mathbf{f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{(n-1)}}}$$

Beispiel:
1) $f(x) = 2x^3 \rightarrow f'(x) = 6x^2$
2) $f(x) = \frac{1}{4}x^8 \rightarrow f'(x) = 2x^7$

$$f(x) = \frac{1}{2x} \to f(x) = \frac{1}{2}x^{-1}$$

3) Ableitung

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-2} \to f'(x) = -\frac{1}{2x^2}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \to f(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

4) Ableitung

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \to f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

5.2.2 <u>Summenregel</u>

$$\boxed{\mathbf{f(x) = n(x) + v(x) \rightarrow f'(x) = n'(x) + v'(x)}}$$

Die Ableitung ist die Summe der Einzelableitungen.

Ist eine Konstante in f(x) vorhanden (Zahl ohne x), so wird diese in der Ableitung 0 bzw. fällt weg.

Beispiel
$f(x) = 3x^2 + 2x - 1 \rightarrow f'(x) = 6x + 2$
$f(x) = \frac{1}{4}x^{16} - 2x^8 + b \rightarrow f'(x) = 4x^{15} - 16x^7$

5.2.3 <u>Produktregel</u>

$$\boxed{\mathbf{f(x) = u(x) \bullet v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x)\bullet v(x) + u(x) \bullet v'(x)}}$$

Beispiele
$f(x) = x(x^3 - 1) \rightarrow f'(x) = 1(x3-1) + x(3x^2)$
$= x^3 - 1 + 3x^3$
$= 4x^3-1$

5.2.4 Quotientenregel

$$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}\rightarrow f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

Die Ableitung ist der Quotient von (Ableitung der 1. Funktion • Nenner) minus (1. Funktion • Ableitung des Nenners) durch den Nenner im Quadrat.

Beispiele

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2-2x+1}\rightarrow$$

$$f'(x)=\frac{(2x)(x^2-2x+1)-(x^2(2x-2)}{(x^2-2x+1)^2}$$

$$=\frac{2x^3-4x^2+2x-2x^3-2x^2}{(x^2-2x+1)^2}$$

$$=\frac{-6x^2+2x}{(x^2-2x+1)^2}$$

$$f(t)=\frac{t^3}{t-1}\rightarrow$$

$$f'(t)=\frac{3t^2(t-1)-t^3(1)}{(t-1)^2}$$

$$=\frac{3t^3-3t^2-t^3}{(t-1)^2}$$

$$=\frac{2t^3-3t^2}{(t-1)^2}$$

5.2.5 Kettenregel (Ableitung verschachtelter Funktionen)

f(g(x)) → f'(g(x)) = f'(g)• g'(x)

Die 1. Ableitung ist das Produkt der 1. Ableitung der äußeren Funktion und der 1. Ableitung der inneren Funktion.

Beispiele

$$f(x)=\sqrt{3x^2+x}\rightarrow$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}(3x^2+x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(6x+1)$$

$$=\frac{6x+1}{2\sqrt{3x^2+x}}$$

äußere Funktion: Wurzel
innere Funktion: $3x^2+x$

$$f(x)=(x^6-2x^2)^7\rightarrow$$

$$f'(x)=7(x^6-2x^2)^6\cdot(6x^5-4x)$$

äußere Funktion: $(...)^7$
innere Funktion: x^6-2x^2

5.2.6 Besondere Ableitungen

5.2.6.1 Logarithmusfunktion

$$f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

Beispiel
$f(x) = \ln(x^2 - 1) \rightarrow$

$f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \cdot 2x$

5.2.6.2 Basis ist Eulersche Zahl [Kettenregel anwenden!]

$$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x \bullet 1$$

Beispiel
$f(x) = e^{x^2-2x} \rightarrow f'(x) = e^{x^2-2x} \bullet (2x-2)$

nach Kettenregel: äußere Funktion: $e^{\cdots}$; innere Funktion: x^2-2x

5.2.7 Ableitungen, wenn Variable als Exponent existiert

I. $f(x) = a^x = e^{\ln a^x} = e^{x\ln a} \rightarrow f'(x) = e^{x\ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$

II. $f(x) = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x} \rightarrow f'(x) = e^{x\ln x} \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = e^x \cdot (\ln x + 1) = x^x \cdot (\ln x + 1)$

5.3 Kurvendiskussion

5.3.1 Definitionsbereich

Für welche x-Werte ist die Funktion definiert?

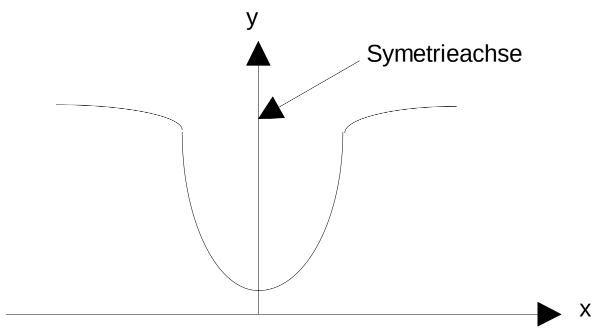
ganzrationale Funktionen	|D = |R
Logarithmus-Funktionen	Argument des log > 0

5.3.2 Symmetrie

5.3.2.1 Achsensymmetrie (Ordinate)

$$\mathbf{f(x) = f(-x)}$$

Beispiel
$f(x) \quad = 2x^6-3x^4+x^2$
$f(-x) \quad = 2(-x)^6-3(-x)^4+(-x)^2$
$\quad\quad = 2x^6-3x^4+x^2$
$\Rightarrow f(x) = f(-x)$

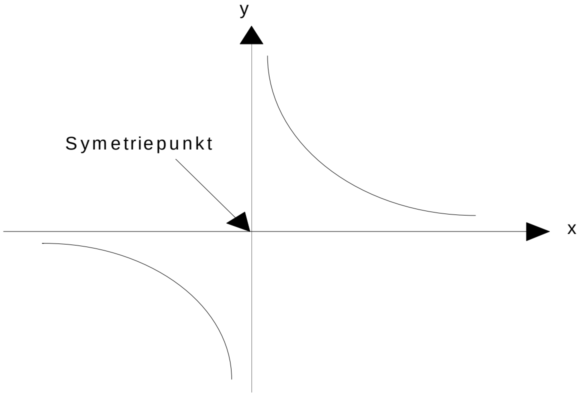


5.3.2.2 Punktsymmetrie (hier: am

Ursprung)

$$\boxed{f(x) = -f(-x)}$$

Beispiel
f(x) $= 3x^7-x^5+4x^3$
f(-x) $= 3(-x)^7-(-x)^5+4(-x)^3$
$= -3x^7+x^5-4x^3$
-f(-x) $= 3x^7-x^5+4x^3$
$\Rightarrow$ f(x) = -f(-x)



Alternativregeln:
- sind alle Exponenten gerade ist die Funktion achsensymetrisch
- sind alle Exponenten ungerade ist die Funktion punktsymetrisch

5.3.3 Nullstellen

$$\boxed{f(x) = 0}$$

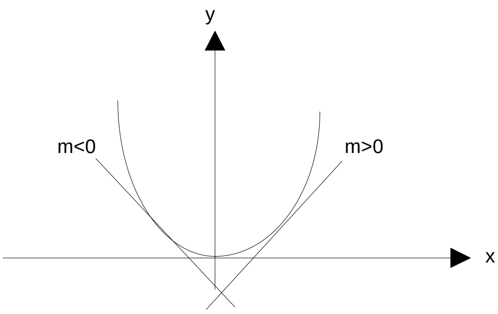
5.3.4 Extrema: 2 Bedingungen

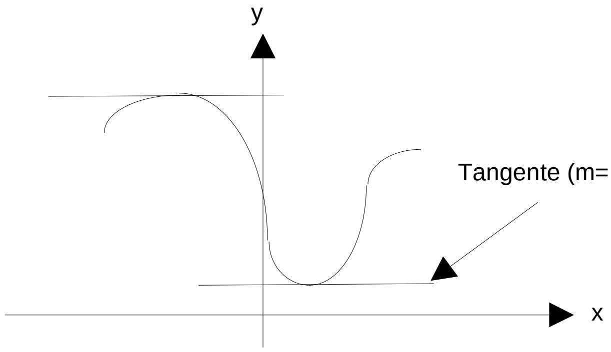
1. notwendig

$$\boxed{f'(x) = m = 0 \rightarrow \text{Maximum oder Minimum existiert}}$$

2. hinreichend

$$f''(x_0) > 0 \rightarrow \text{Minimum}$$
$$f''(x_0) < 0 \rightarrow \text{Maximum}$$





Sonderfall: Was geschieht, wenn f''(x) = 0 gilt?

Beispiel:
$f(x) = x^4$
$f'(x) = 4x^3 = 0$
$x = 0$
$f''(x_0) = 12^2$
$f''(0) = 12 \bullet 0^2 = 0$
$f'(-1) = 4(-1)^3 = -4$
$f'(1) = 4(1)^3 = 4$

Obwohl f''(x) = 0 gilt, zeigt der Graph der Funktion $f(x) = x^4$ deutlich, dass er an der Stelle (0|0) ein Minimum besitzt.

Ersatzkriterium:
Wenn 1. und 2. Ableitung jeweils 0 sind, dann sollte man das Steigungsverhalten links und rechts von dem ermittelten x_0-Wert untersuchen. Hierzu setzt man einen frei wählbaren Wert links von x_0 in f'(x) ein - im Beispiel wäre dies (-1)-:

$$f'(-1) = 4 \cdot (-1)^3 = -4.$$

Genauso verfährt man mit einem beliebigen x-Wert rechts von x_0 - z. B. (1):

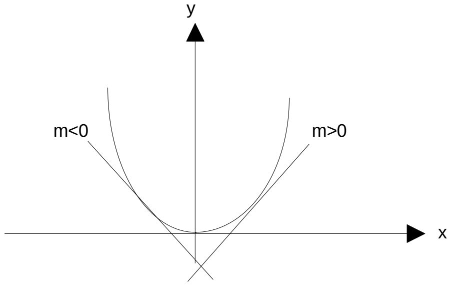
$$f'(1) = 4 \cdot (1)^3 = 4.$$

Im ersten Fall liegt eine Steigung von -4 vor; im zweiten Fall eine von 4. Da wir von einer stetigen Funktion ausgingen —d. h. es liegen keine Sprünge oder Unstetigkeitsstellen vor— folgt:
aus dem Übergang von negativen in ein positives Steigungsverhalten

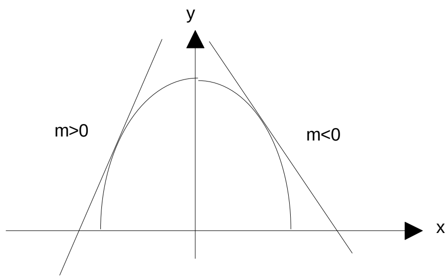
in x_0 muss die Steigung 0 betragen haben ⇨ Extremwert in x_0

Die Art des Extremwerts wird durch den Übergang des Steigungsverhaltens bestimmt:

1. von $m < 0 \rightarrow m > 0$ ⇨ Minimum



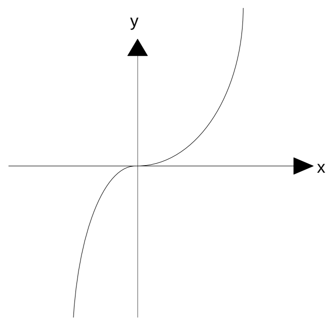
2. von $m > 0 \rightarrow m < 0$ ⇨ Maximum



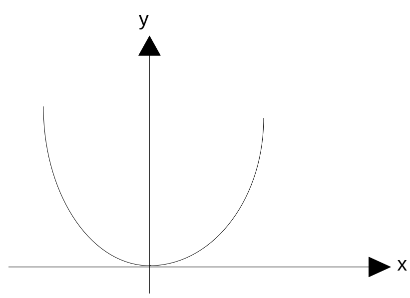
5.3.5 Wendepunkte

f''(x) = 0	notwendig
f'''(x) ≠ 0	hinreichend

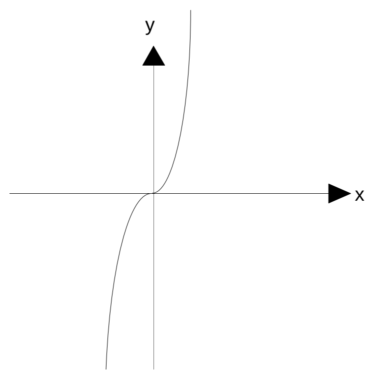
Beispiel:
1. $f(x) = x^3$
   $f'(x) = 3x^2$
   $f''(x) = 6x = 0$
   $x = 0$
   $f'''(x) = 6$
   $f'''(0) = 6 \Rightarrow \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt = 0



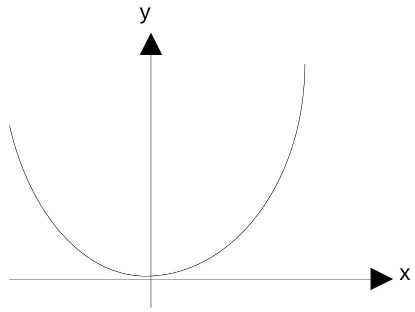
2. $f(x) = x^2$
   $f'(x) = 2x$
   $f''(x) = 2$
   $f'''(0) = 0 \Rightarrow$ kein Wendepunkt



3. $f(x) = x^5$
   $f'(x) = 5x^4$
   $f''(x) = 20x^3 = 0$
   $x = 0$
   $f'''(x) = 60x^2$
   $f'''(0) = 0 \Rightarrow$?



4. $f(x) = x^4$
   $f'(x) = 4x^3$
   $f''(x) = 12x^2 = 0$
   $x = 0$
   $f'''(x) = 24x$
   $f'''(0) = 0 \Rightarrow ?$



Ersatzkriterium für Sonderfälle:
Am Wendepunkt ändert f'' das Vorzeichen beim Einsetzen von links- und rechtsseitigen Werten von x_0 (vgl. Überlegung Extrema).

$f''(x) = 20x^3$
$f''(-1) = -20$
$f''(1) = 20 \Rightarrow f(x)=x^5$ hat in (0|0) doch einen Wendepunkt, obwohl $f'''(0) = 0$ gilt.

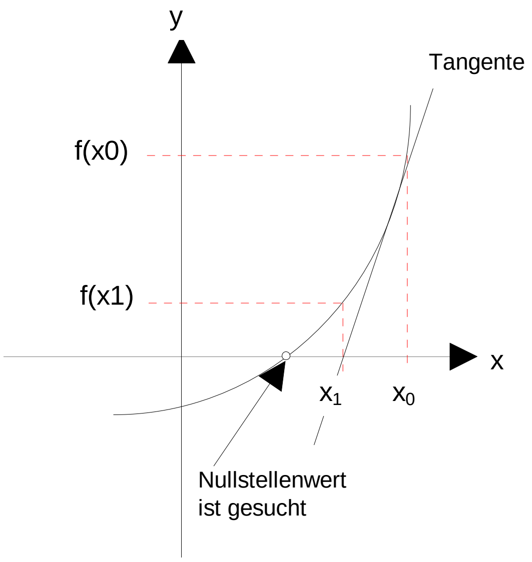
5.3.6 Grenzwertverhalten

$$\boxed{x \rightarrow \pm \infty}$$

5.3.7 Skizze

5.4 Anwendungsbeispiele der Differentialrechnung

5.4.1 Newton-Verfahren
Ziel: Iterative Ermittlung von Nullstellen höherwertiger Funktionen



Steigung der Tangente (m):

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

daraus folgt:

Newton-Iterationsformel

$$\boxed{x_1 = x_0 - \frac{f(x)}{f'(x_0)}}$$

Beispiel:

$$\sqrt{2} = x$$
$$2 = x^2$$
$$x^2 - 2 = 0$$
$$f(x) = x^2 - 2$$
$x_0 = 1$ (Startwert muß frei gewählt werden)
$$f'(x) = 2x$$
$$\boxed{x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$$
$$x_1 = 1 - \frac{-1}{2}$$
$$x_1 = 1{,}5$$
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_2)}$$
$$x_2 = 1{,}5 - \frac{\frac{1}{4}}{3} = \frac{3}{2} - \frac{1}{12} = \frac{18}{12} - \frac{1}{12} = \frac{17}{12} = 1{,}41$$

Man kann erkennen, dass nach zwei Iterationsvorgängen bereits ein sehr exakter Wert erzielt werden kann.

5.4.2 Grenzwertberechnung mit Hilfe der Regel von L'Hospital

Gelangt man beim Grenzwertübergang zu folgender Situation:

1.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$$

bzw.

2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$$

oder zu einer Kombination aus 1. und 2., dann muss geprüft werden, welcher Teil (Nenner oder Zähler) schneller gegen 0 bzw. ∞ strebt.

z. B.: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}=\frac{e^\infty}{2\infty}=\frac{\infty}{\infty}$

Frage: Strebt e^x oder 2x schneller gegen Unendlich?
Dieses Problem und der damit verbundene Grenzwert kann mit Hilfe der Regel von L'Hospital gelöst werden:
Die Funktionen im Zähler und Nenner werden getrennt voneinander differenziert, d. h. keine Quotientenregel anwenden.
Danach wird abermals ein Grenzwertübergang durchgeführt.
Sollte dann immer noch die Ausgangssituation $\left(\frac{\infty}{\infty};\frac{0}{0};\frac{\infty}{0};\frac{0}{\infty}\right)$ auftreten, werden die Differentiation und der Grenzwertübergang noch einmal wiederholt.

Beispiel:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}=\frac{e^x}{2}=\frac{\infty}{2}=\infty$$

Differentiation
von $e^x \rightarrow e^x$
und $2x \rightarrow 2$

Grenzwert-
übergang

Daraus ist zu erkennen, dass e^x schneller gegen große Zahlen strebt als 2x.