6 Differentialrechnung bei Funktionen in mehreren Veränderlichen

DEFINITION

Es seien x_1, x_2; ..., x_n reelle unabhängige Variablen. Wenn jede Wertekombination (x_1; x_2; ..., x_n) genau eine Zahl y $\in$|R zugeordnet ist, so nennt man diese Zuordnung eine reelle Funktion f der n-unabhängigen Variablen.

Allgemeine Zuordnungsvorschrift

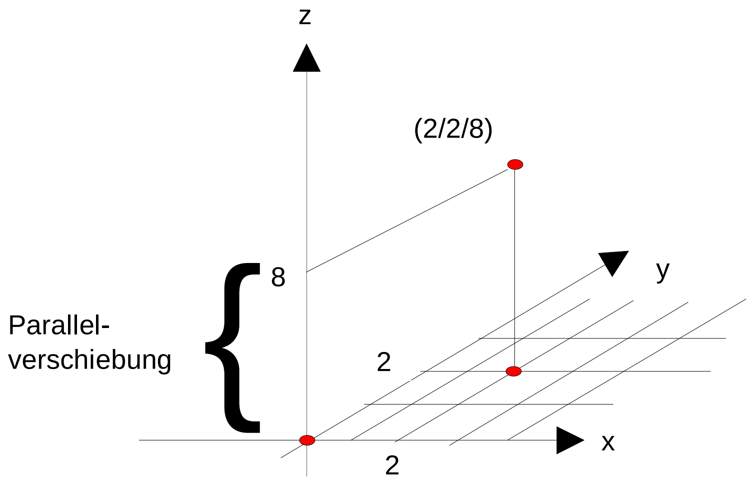
$$(x_1; x_2; ..., x_n) \rightarrow y = f(x_1; x_2; ..., x_n)$$

Beispiel:
$(x, y) \rightarrow f(x, y) = x^2 + y^2$
$(1, 2) \rightarrow f(1, 2) = 1^2 + 2^2 = 5$

Wertetabelle für $f(x, y) = x^2 + y^2$

x | y	-3	-2	-1	0	1	2	3
-3	18						
-2		8					
-1			1				
0				0			
1					1		
2						8	
3							18

Konstruktion des Punktes (2|2|8)



Darstellung mehrdimensionaler Funktionen (Rotationsparbolid)

6.1 Partielle Ableitung

Hierbei wird nach einer Variablen abgeleitet; alle anderen Variablen bleiben konstant (= ceteris paribus-Bedingung)

Beispiel:

$$f(x; y; z) = \ln x + e^{2y} + z^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$$

$$f_x = \frac{1}{x}$$

$$f_y = 2e^{2y}$$

$$f_z = 3z^2$$

Alle Ableitungen werden zu einem Vektor zusamengefaßt

$$\text{Grad}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ 2e^{2y} \\ 3z^2 \end{pmatrix}$$

Der Gradient ∇ ist der Vektor der 1. Partiellen Ableitung und gibt die Richtungen der Funktion in einem beliebigen Punkt ($x_1|x_2|...|x_n$) an.

Bei mehrmaligem Ableiten der Funktion mit mehreren Variablen ist die Ableitungreihenfolge (nach den einzelnen Variablen) beliebig austauschbar.

Beispiel:

$f(x) = \ln x;\ f_x = \frac{1}{x};\ f_{xx} = \frac{1}{x^2};\ f_{xy} = 0$

$f(y) = e^{2y};\ f_y = 2e^{2y};\ f_{yy} = 4e^{2y};\ f_{yx} = 0$

$f(z) = z^3;\ f_z = 3z^2;\ f_{zz} = 6z;\ f_{zzz} = 6;\ f_{zy} = 0$

6.2 Relative Extrema bei Funktionen in mehreren Variablen

6.2.1 Funktionen mit 2 unabhängigen Variablen

DEFINITION

Es f(x,y) differenzierbar und $P(x_0;y_0)$ stationäre Stelle von f, d. h. f(x) = 0 und f(y) = 0. Dann besitzt f in P ein relatives Extremum, wenn gilt:

$f(x_0,y_0)$ ist negativ definit ⇨ relatives Maximum

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1.f_{xx}(x_0) < 0 \\ 2.f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 \geq 0 \end{cases}$$

$f(x_0,y_0)$ ist positiv definit ⇨ relatives Minimum

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1.f_{xx}(x_0) > 0 \\ 2.f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 \geq 0 \end{cases}$$

Ist keine Bedingung erfüllt ⇨ Sattelpunkt bei $P(x_0;y_0)$.

1. Beispiel für die Ermittlung eines Extremums:

$f(x,y) = x^2 + y^2$

I. Bildung der partiellen Ableitungen
$f_x = 2x;\ f_y = 2y$

II. Berechnung der stationären Stelle
$f_x = 0;\ f_y = 0$
$2x = 0;\ 2y = 0$
$x = 0;\ y = 0$
⇨ stationäre Stelle: (x,y) = (0/0)

III. Prüfung der Art des Extremwertes
$f_{xx} = 2;\ f_{xy} = 0$
$f_{yy} = 2;\ f_{yx} = 0$

1. $f_{xx} = 2 > 0$ ⇨ positiv definit
2. $f_{xx} \bullet f_{yy} - (f_{xy})^2 = 2 \bullet 2 - 0 = 4 > 0$ ⇨ relatives Minimum

2. Beispiel für die Ermittlung eines Extremums:

$f(x,y) = 10 - x^2 - y^2$

I. Bildung der partiellen Ableitungen
$f_x = -2x;\ f_y = -2y$

II. Berechnung der stationären Stelle
$f_x = 0; f_y = 0$
$-2x = 0; -2y = 0$
$x = 0; y = 0$
⇨ stationäre Stelle: (x,y) = (0/0)

III. Prüfung der Art des Extremwertes
$f_{xx} = -2; f_{xy} = 0$
$f_{yy} = -2; f_{yx} = 0$

1. $f_{xx} = -2 < 0$ ⇨ negativ definit
2. $f_{xx} \bullet f_{yy} - (f_{xy})^2 = (-2) \bullet (-2) - 0 = 4 > 0$ ⇨ relatives Minimum an der stationären Stelle P(0/0)

Funktionswert an P(0/0): f(0/0)=10-0²-0²=0 ⇨ Maximum (0/0/10)

3. Beispiel mit stationärer Stelle $(x / y) = (0 / \sqrt[3]{10})$

$f_{xx} = -2;\ f_{yy} = 0;\ f_{xy} = -3 \cdot 10^{\frac{2}{3}}$
$1. f_{xx} = -2 < 0$
$2. f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = 0 - a < 0$
$\Rightarrow$ Sattelpunkt

6.2.2 <u>Funktionen mit n unabhängigen Variablen (n ≥ 3)</u>

DEFINITION
Es sei $f(x_{1;}x_{2;}...|;_n)$ differenzierbar und $P(x_{01}|x_{02}|...|x_{0n})$ stationäre Stelle von f, d. h.

$f(x_{01}) = 0$
$f(x_{01}) = 0$
.
.
.
$f(x_{0n}) = 0.$

Dann besitzt f in P ein relatives Extremum, wenn gilt:

$f(x_{01}; x_{02}; ...; x_{0n})$ ist negativ definit ⇨ relatives Maximum
$\Leftrightarrow Det(H;(x)) > 0$

$f(x_{01}; x_{02}; ...; x_{0n})$ ist positiv definit ⇨ relatives Minimum
$\Leftrightarrow Det(H;(x)) > 0$

Anmerkung: H(x) = Hesse-Matrix

Die Hesse-Matrix ist die Matrix der zweiten partiellen Ableitung einer Funktion mit n unabhängigen Variablen.

$$H(x) = \begin{pmatrix} f_{x1x1} & f_{x1x2} & \Lambda & f_{x1xn} \\ f_{x2x1} & f_{x2x2} & \Lambda & f_{x2xn} \\ M & M & M & M \\ f_{xnx1} & f_{xnx2} & \Lambda & f_{xnxn} \end{pmatrix}$$

Aus der gesamten Hesse-Matrix werden nacheinander die Determinantenwerte der einzelnen Hauptminoren ermittelt:

$$H_1(x) = f_{x1x1}$$

$$H_2(x) = \begin{pmatrix} f_{x1x1} & f_{x1x2} \\ f_{x2x1} & f_{x2x2} \end{pmatrix}$$

$$H_3(x) = \begin{pmatrix} f_{x1x1} & f_{x1x2} & f_{x1x3} \\ f_{x2x1} & f_{x2x2} & f_{x2x3} \\ f_{x3x1} & f_{x3x2} & f_{x3x3} \end{pmatrix}$$

$$H_n(x) = H(x)$$

6.3 Extrema unter Nebenbedingungen

Beispiele
Nutzenmaximierung bei vorgegebenem Budget
Kostenminimierung bei vorgegebenem Produktionsniveau
Gewinnmaximierung bei vorgegebenen Gesamtkosten

Zwei Typen von Angaben sind zur Berechnung notwendig:

1. Zielfunktion — Was optimiert werden soll?
2. Nebenbedingung(en) — Restriktionen

Ziel: Man ermittle das Maximum/Minimum der Zielfunktion Z = f(x_1; x_2; ...; x_n), wobei die auftretenden n-Variablen gleichzeitig den einzelnen Nebenbedingungen genügen müssen.

6.3.1 Lösung durch Variablen-Substitution

Beispiel:
U(x,y) = 2xy (Zielfunktion)
60 = 3x + 2y (Nebenbedingung [Budget=60; x,y = Produkte])

NB wird nach y aufgelöst

$$y = 30 - \frac{3}{2}x$$

Einsetzen in ZF

$$U(x) = 2x \cdot \left(30 - \frac{3}{2}x\right)$$
$$= -3x^2 + 60$$

Bestimmen der Extrema

$$U'(x) = -6x + 60$$
$$U'(x) = 0 \Rightarrow x = 10$$
$$U''(x) = -6 < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$$

Einsetzen in NB

$$60 = 3 \cdot 10 + 2y$$
$$y = 15$$

Größe des Gesamtnutzens (optimale Produktionsverteilung)

$$U(10/15) = 2 \cdot 10 \cdot 15 = 300$$

6.3.2 Lagrange-Verfahren

Lösung erfolgt durch additives Anfügen der Nebenbedingung(en) an die Zielfunktion; danach Ableiten der Lagrange-Funktion.

U(x,y) = 2xy (Zielfunktion)
60 = 3x + 2y (Nebenbedingung [Budget=60; x,y = Produkte])

Nebenbedingung 0 setzen:

60 - 3x -2y = 0

$$L(x,y,l) = \overbrace{2xy}^{ZF} + l\overbrace{(60-3x-2y)}^{NB}$$

$$L_x = 2y - 3l = 0 \Leftrightarrow l = \frac{2}{3}y$$

$$L_y = 2x - 2l = 0 \Leftrightarrow l = x$$

$$L_l = 60 - 3x - 2y$$

l gleichsetzen $\Rightarrow$

$$x = \frac{2}{3}y$$

in NB einsetzen

$$60 - 3\left(\frac{2}{3}y\right) - 2y = 0$$

$$60 - 2y - 2y = 0$$

$$60 - 4y = 0$$

$$y = 15$$

in obere Funktion einsetzen

$$x = \frac{2}{3}y$$

$$x = \frac{2}{3}\cdot 15$$

$$x = 10$$

Eine Extremwertprüfung ist nicht notwendig, da das Ergebnis grundsätzlich das Optimum anzeigt!

Um eine generelle Aussage treffen zu können, müßten zusätzlich noch die sogenannten Kuhn-Tucker-Bedingungen geprüft werden. Diese bleiben hier jedoch außer Betracht.

Übung:

ZF: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$
NB. $1 = x + y \rightarrow 1 - x - y = 0$
$2 = y + z \rightarrow 2 - y - z = 0$

$L(x,y,z,\lambda,\mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(1 - x - y) + \mu(2 - y - 2)$
$L_x = 2x - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2x$
$L_y = 2y - \lambda - \mu = 0$
$L_z = 2z - \mu = 0 \Leftrightarrow \mu = 2z$
$L_\lambda = 1 - x - y = 0 \Leftrightarrow x = y - z$
$L_\mu = 2 - y - z = 0 \Leftrightarrow z = 2y - 1$
$2 - y - (2y - 1) = 0$
$2 - y - 2y + 1 = 0$
$-3y = -3$
$y = 1$

in z einsetzen
$z = 2 - 1 = 1$
$x = y - z$
$x = 0$

Maximum bei (0/1/1) $\Rightarrow$ $f(0,1,1) = 0^2 + 1^2 + 1^2 = 2$

6.3.3 <u>Graphische Lösung</u>

nur bei Funktionen mit zwei unabhängigen Variablen

U(x,y) = 2xy (Zielfunktion)
60 = 3x + 2y (Nebenbedingung [Budget=60; x,y = Produkte])

NB nach y auflösen

$$y = -\frac{3}{2}x + 30$$

ZF nach y auflösen

$$y = \frac{U}{2x}$$

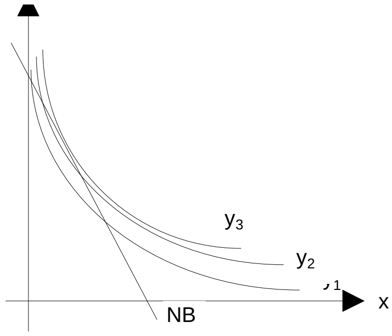
willkürlich Zahlenwerte für U benennen

U(100,200,300)

$$y_1 = \frac{50}{x}$$

$$y_2 = \frac{100}{x}$$

$$y_3 = \frac{150}{x}$$



In dem Punkt, wo die Zielfunktion die Nebenbedingung mit ihrem tiefen Punkt tangiert ist der optimale Wert.

6.4 Totales Differential und totale Ableitung

Hierbei ändern sich alle Variablen

6.4.1 <u>Totales Differential</u>

Aussage über die Änderung des Funktionswertes (=df), wenn sich die Funktionsvariablen um dx verändern (im Gegensatz zur ceteris-paribus-Bedingung).

$$\boxed{df = f_{x1} \bullet d_{x1} + f_{x2} \bullet d_{x2} + \ldots + f_{xn} \bullet d_{xn}}$$

Beispiel:

p(A,K) = $A^{0,5} \bullet K$
Ausgangspunkt: A = 4; K = 2 ⇨ p(4,2) = 4
Es ändert sich der Arbeitseinsatz um 5 Einheiten: dA = 5
es ändert sich der Kapitaleinsatz um 1 Einheit: dK = 1

Um wieviel ändert sich das Produktionsvolumen?

$$dp = \overbrace{0,5\frac{K}{A^{0,5}}}^{A} \cdot dA + \overbrace{A^{0,5}}^{K} \cdot dK$$

$$= 0,5 \cdot \frac{2}{2} \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 4,5$$

Der alte und neue Wert (Veränderung hier: Steigerung) ergibt näherungsweise die Gesamtveränderung bzw. -steigerung bei Veränderung aller Variablen. Der genaue Wert wird nur durch Einsetzen der neuen Variablen in die ursprüngliche Funktion errechnet.

6.4.2 Totale Ableitung

Aus dem totalen Differential ergibt sich durch Division von dx; die totale Ableitung.

$$\frac{df}{dx_i} = fx_1 \cdot \frac{dx_1}{dx_i} + fx_2 \cdot \frac{dx_2}{dx_i} + ... + fx_n \cdot \frac{dx_n}{dx_i}$$

für die Funktion $f(x_1, x_2, ..., x_n)$

Anwendungen:
1. Ableitung impliziter Funktionen (nicht nach y aufgelöst)
Problem: Finden einer Ableitung
Lösung: I. Umwandlung in explizite Form und ableiten
II. Funktionen, die nicht umgeleitet werden können?

Beispiel:
$e^{xy} + 2y = e^{2x-y}$

Formel für die Ableitung impliziter Funktionen

$$\boxed{\frac{d_y}{d_x} = -\frac{f_x}{f_y}}$$

Beispiel:

Implizite Darstellung	→	Explizite Darstellung
$x^2 + y = 3$		$y = 3 - x^2$

I. Ableitung der expliziten Funktion
$f'(x) = -2x$

II. Ableitung der impliziten Funktion

$$\frac{d_y}{d_x} = -\frac{f_x}{f_y}$$

$$\frac{d_y}{d_x} = \frac{-2x}{1} = -2x$$

Da allerdings nicht alle implizit gegebenen funktionalen Ausdrücke in explizite Darstellungen umgerechnet werden können, ist die Formel zur Differentiation impliziter Funktionen sehr nützlich.

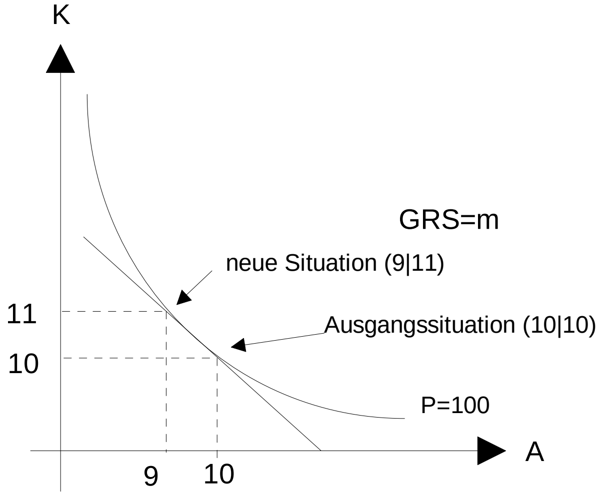
6.5 Grenzrate der Substitution (GRS bzw. MRS)

Idee: Wieviel muss man von einem Faktor mehr aufwenden, um eine Einheit des anderen zu ersetzen?

Anwendung ist nur bei zwei Variablen möglich; bei mehr Variablen müssen die über zwei hinausgehenden Variablen als konstant angesehen werden.

Steigung der Isoquante (3D-Kurve, auf der gleiches Niveau herrscht) = Grenzrate der Substitution

$P(A, K) = A \bullet K$
Wieviel Kapital muss aufgewandt werden, um eine Arbeitskraft einzusparen?
1. Fall vorgegebenes Produktionsniveau
$A \bullet K = 100$
$9 \bullet K = 100$
$K \approx 11 \Rightarrow DK = 1$



Um eine Einheit Arbeitskraft einzusparen, muß eine Einheit Kapital mehr aufgewendet werden.

2. Fall: allgemeine Darstellung

$$\frac{dK}{dA} = -\frac{P_A}{P_K}$$

Beispiel:

$$P(A,K) = A^{0,5} \cdot K; A = 4; K = 2$$

$$\frac{dK}{dA} = -\frac{0,5A^{-0,5} \cdot K}{A^{0,5}}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{K}{A}$$

$$\frac{dK}{dA} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$\Delta A = -1$$

$$\frac{dK}{-1} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \quad dK = \frac{1}{4}$$

Wenn eine EH Arbeitskraft weniger eigesetzt werden soll, muß $\frac{1}{4}$ EH mehr Kapital aufgewendet werden.