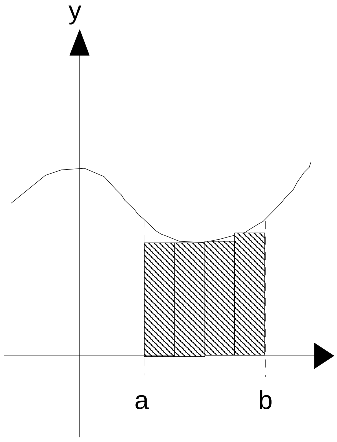
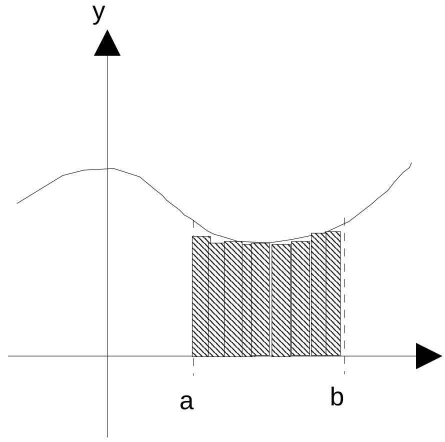
7 Integralrechnung

Problemstellung:	Die Berechnung einer Fläche unter einer Funktion zwischen zwei äußeren Grenzen.
Lösungsidee:	Zerlegung der Gesamtfläche in rechteckige Bänder (Ausschöpfungsmethode), wobei die Anzahl der Bänder → ∞ geht (Breite der Bänder wird immer kleiner).





7.1 Allgemeine Integralformel

$$f(x) = x^n$$

$$F(x) = \int_a^b f(x)\,dx$$

ohne Wert; zeigt lediglich an nach welcher Variablen differenziert werden soll

$$= \int_a^b x^n\,dx$$

$$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right)$$

Beispiele

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3$$

$$\int 2x^4 dx = \frac{2}{5}x^5$$

$$\int \frac{1}{6}x^7 dx = \frac{1}{48}x^8$$

$$\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

$$\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = -\frac{1}{x}$$

Da die Integration eine zur Differentiation entgegengesetzte Rechenoperation darstellt, kann die Probe durch Ableiten des integrierten Terms durchgeführt werden.

7.2 Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

Es sei eine Funktion f(x) auf einem Intervall [a,b] stetig, dann ist jede Integralfunktion F(x) von f auf [a,b] differenzierbar und es gilt:

$$\boxed{\begin{aligned}F(x) &= \int_a^b f(x)\,dx \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}}$$

DEFINITION

stetig — *Die Funktion hat keine Sprünge, d. h. der Graph ist durchgängig zu zeichnen.*

7.3 Rechenregeln zur Integration

7.3.1 Linearität

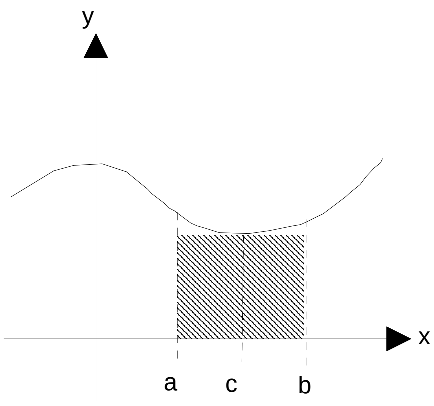
$$\boxed{\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx}$$

Beispiel

$\int 3x^2\,dx = 3\int x^2\,dx$

7.3.2 Intervalladditivität

$$\boxed{\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx}$$



7.3.3 Gleichheit der oberen und unteren Grenzen

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0}$$

Geometrische Interpretation: Eine Strecke besitzt die Dimension 1, d. h. nur eine Länge ⇨ Fläche = 0

7.4 Grundintegrale

Werden keine Grenzen gesetzt, so handelt es sich um offene bzw. unbestimmte Integrale. Hierbei wird an die Integration eine Konstante „c“ addiert.

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$$

$$\int (x^2 + 2) \, dx = \frac{1}{3} x^3 + 2x + c \qquad (x^2+2) = (x^2+2x^0)$$

$$\int a \, dx = ax + c \qquad a = ax^0$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c$$

Rechenbeispiel zur Ermittlung der Fläche zwischen der Funktion f(x) und der Abszisse (= x-Achse).

$f(x) = x^2 - 4$

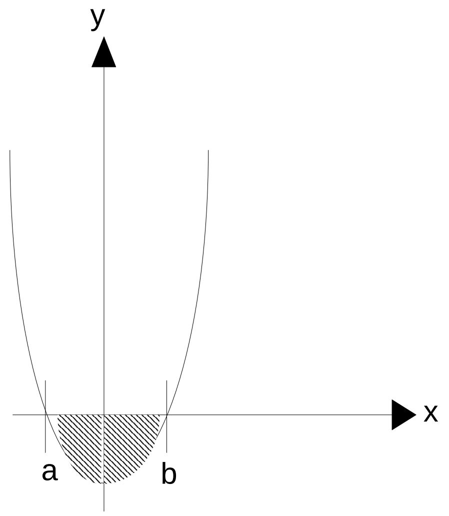
$$A = \int_{x1}^{x2} f(x)dx$$

1. Schritt: Nullstellenberechnung [Berechnung der Integrationsgrenzen (⇨ Schnittpunkte der Funktion mit der x-Achse)]

$f(x) = 0$

$x^2 - 4 = 0$

$x = \pm 2$



2. Schritt: Integration

$$A = \int_{-2}^{2} f(x)dx$$

$$= \int_{-2}^{2} (x^2 - 4)dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_{-2}^{2}$$

$$= \frac{8}{3} - 8 - \left(-\frac{8}{3} + 8\right)$$

$$= \frac{8}{3} - 8 + \frac{8}{3} - 8$$

$$= \frac{16}{3} - 16$$

$$= -\frac{32}{3}$$

Wenn das Ergebnis negativ ist, befindet sich die Fläche unterhalb der x-Achse.

7.5 Integrationstechniken

7.5.1 <u>Partielle Integration (= Umkehrung der Produktregel)</u>

$$h = f \cdot g$$

$$\int h = \int f \cdot g$$

$$\int h' = \int f' g + f \cdot g'$$

$$h = \int f' g + f \cdot g'$$

$$f \cdot g = \int f' g + f \cdot g'$$

$$\boxed{f \cdot g = \int f' g + \int f \cdot g' \rightarrow \int f' g = f \cdot g - \int f \cdot g'}$$

Beispiel
$h(x)=x \cdot e^x$
Lösung mittels partieller Integration mit dem Ziel, dass ein Faktor der Funktion durch die Ableitung f' bzw. g' in der Lösungsformel entfällt: ⇨ hier: g'=1

$f' = e^x; g = x$

$\int xe^x = e^x x - \int e^x 1$

$\int xe^x = e^x x - e^x$

7.5.2 <u>Integration durch Substitution</u>

Beispiel 1

$f(x) = e^{4x} \quad \alpha \quad \int e^{4x}\, dx = ?$

<u>Subsitution</u> der inneren Funktion, wob auch der Integrationsfaktor dx erstezt werden muß

$4x = u$

$4dx = du/:4$

$dx = \frac{1}{4} du$ eingesetzt:

$\int e^{4x}\, dx = \frac{1}{4} \int e^u\, du = \frac{1}{4} e^u$

<u>Resubstitution:</u>

$\Rightarrow \frac{1}{4} e^{4x}$

Beispiel 2

$f(x) = x\sqrt{1 - x^2} \quad \alpha \quad \int \sqrt{1 - x^2} x dx = ?$

<u>Substitution:</u>

$a - x^2 = u$

$-2xdx = du$

$xdx = -\frac{1}{2} du$ eingesetzt:

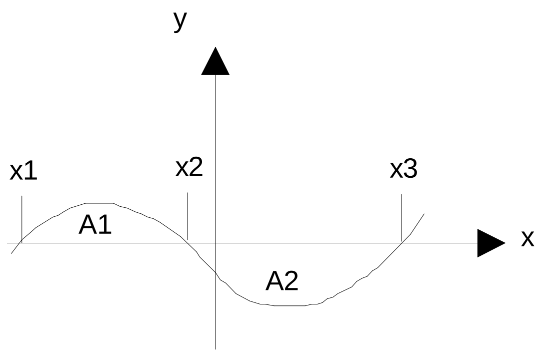
$-\frac{1}{2} \int \sqrt{u} du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{2}{3}}$

<u>Resubstitution:</u>

$\Rightarrow = -\frac{1}{3}(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}$

7.6 Anwendung der Integralrechnung

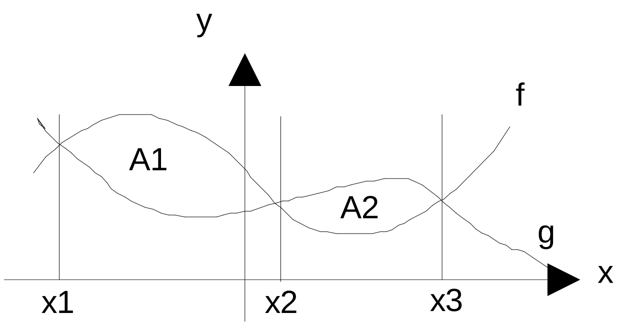
7.6.1 Flächen zwischen Kurven



Welche Funktion schließt die Funktion mit der x-Achse ein?

$A=A_1+A_2$ $\quad A=\int_{x_1}^{x_2} f+\int_{x_2}^{x_3} f$

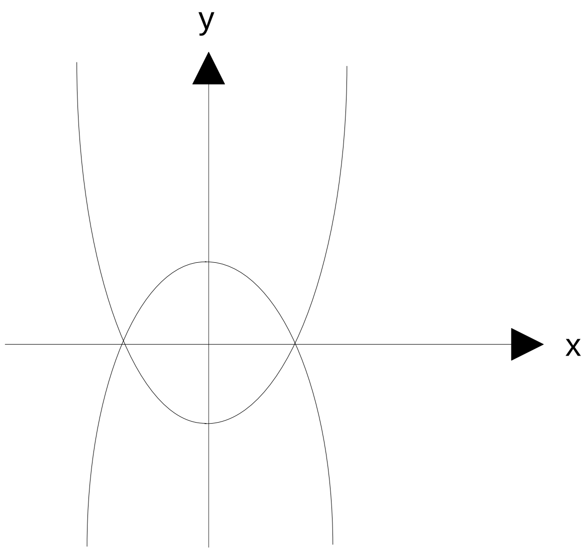
7.6.2 Flächen zwischen Funktionen



$A=A_1+A_2$ $\quad A=\left|\int_{x_1}^{x_2}(f-g)\right|+\left|\int_{x_2}^{x_3}(f-g)\right|$

Beispiel:
$f(x) = x^2-2$
$g(x) = -x^2+6$

1. Schnittstellenberechnung
$x^2-2=-x^2+6$
$2x^2=8$
$x^2=4$
$x=\pm 2$



2. Integration

$$A = \int_{-2}^{2} f - g$$

$$= \int_{-2}^{2} x^2 - 2 + x^2 - 6dx$$

$$= \int_{-2}^{2} 2x^2 - 8$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^3 - 8x\right]_{-2}^{2}$$

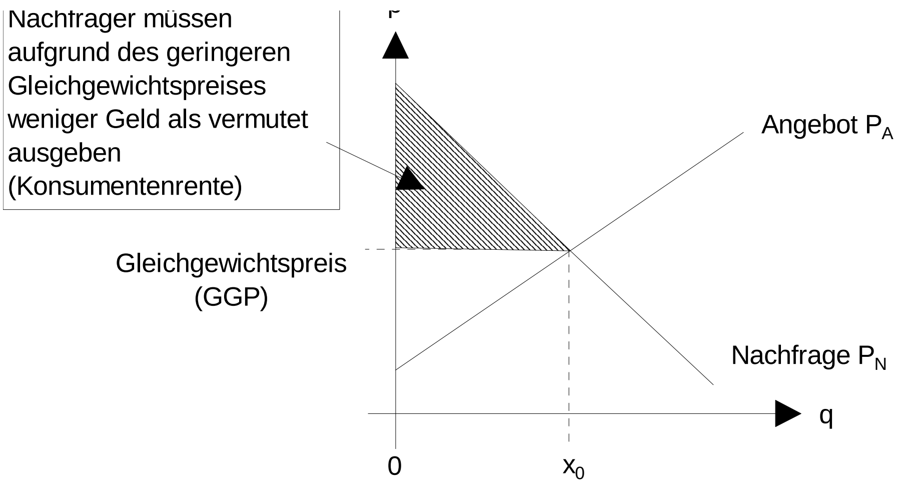
$$= \frac{2}{3}\cdot 8 - 16 - \left(-\frac{2}{3}x + 16\right)$$

$$= \frac{16}{3} - 16 + \frac{16}{3} - 16 = \frac{32}{3} - 32$$

$$= \frac{32}{3} - \frac{96}{3} = \frac{64}{3} = -21\frac{1}{3}$$

7.7 Ökonomische Anwendungen

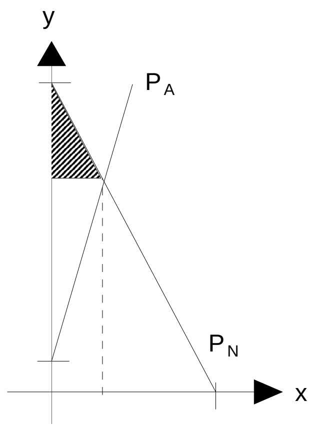
7.7.1 <u>Konsumentenrente</u>



$$K_R = \int_{0}^{x_0} P_N(x) - P_N(x_0)$$

$$= \int_{0}^{x_0} P_N(x)dx - P\,(x_0)\cdot x_0$$

Beispiel
$P_N(x)$= 100 - 2 x
$P_A(x)$= 4 x + 10

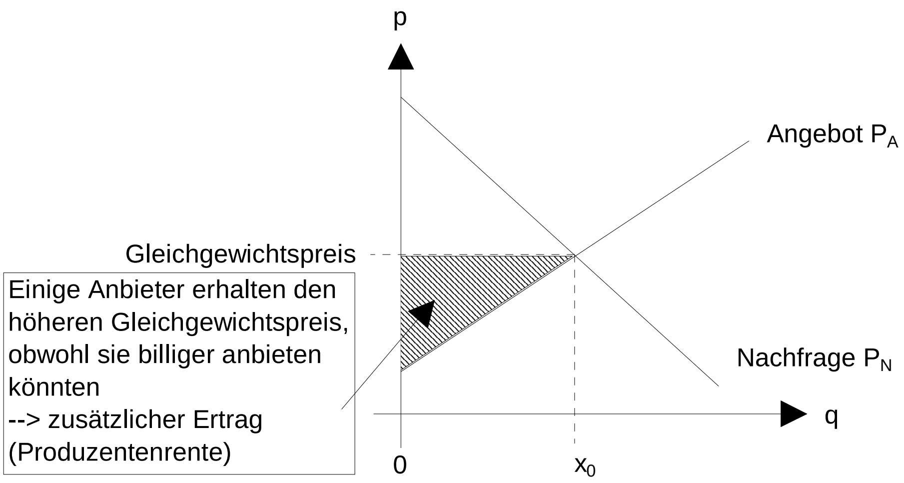


1. Berechnung des Gleichgewichtspreises
$P_N = P_A$
100 - 2 x = 4x + 10
90 = 6 x
x = 15
$P_N(15)$=70

2. Berechnung der Konsumentenrente

$$K = \int_0^{15} (100 - 2x) - 70 \cdot 15$$
$$= \left[100 - x^2\right]_0^{15} - 1050$$
$$= 1500 - 225 - 1050$$
$$= 225 \text{ GE}$$

7.7.2 Produzentenrente



$$P_R = \int_0^{x_0} P(x_0) - P_A(x)dx$$
$$= P(x_0) \cdot x_0 - \int_0^{x_0} P_A(x)dx$$

Beispiel
$P_A(x) = 0{,}25(x+2)^2$
$x_0 = 3$

1. Berechnung des Gleichgewichtspreises
$P_A(3) = 6{,}25$

2. Berechnung der Produzentenrente

$$P = 6{,}25 \cdot 3 \int_0^3 0{,}25(x+2)^2 dx$$
$$= 18{,}75 - 0{,}25 \int_0^3 x^2 + 4x + 4 \; dx$$
$$= 18{,}75 - 0{,}25 \left[\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x\right]_0^3$$
$$= 18{,}75 - 0{,}25(9 + 18 + 12)$$
$$= 9 \text{ GE}$$