## Partielle Integration

**Integration von Produktfunktionen => Umkehrung der Produktregel (Differentialrechnung)**

**Problem:** $h(x)=x\cdot e^{x} \quad \rightarrow \quad \int x\cdot e^{x}dx \quad = \quad ???$

**Überlegung? Faktorweise integrieren**

$$h(x)=x\cdot e^{x} \quad \rightarrow \quad \int x\cdot e^{x}dx \quad = \quad \int xdx\cdot\int e^{x}dx \quad = \quad \frac{1}{2}x^{2}\cdot e^{x}+c \quad = \quad H(x) \quad ???$$

Probe: $\left[H(x)\right]'=h(x)$

$$\left[H(x)\right]' \quad = \quad \frac{dH}{dx}\left[\frac{1}{2}x^{2}\cdot e^{x}+c\right] \quad = \quad x\cdot e^{x}+\frac{1}{2}x^{2}\cdot e^{x} \quad = \quad \left(x+\frac{1}{2}x^{2}\right)\cdot e^{x} \quad \neq \quad h(x) \quad \rightarrow \quad falsch!!!$$

**Neue Berechnung - Herleitung:**

$$h(x)=x\cdot e^{x} \quad \rightarrow \quad \int x\cdot e^{x}dx \quad = \quad ???$$

allgemein:

$$h(x)=x\cdot e^{x} \quad \rightarrow \quad h(x)=f(x)\cdot g(x) \quad \xrightarrow{bekannt:\ Produktregel} \quad h'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

$$\rightarrow \quad \int h(x)dx=\int f(x)\cdot g(x)dx$$

$$\xrightarrow{Ableitung} \quad \left[\int h(x)dx\right]'=\left[\int f(x)\cdot g(x)dx\right]' \quad \rightarrow \quad h(x)=\int f'(x)\cdot g(x)dx+\int f(x)\cdot g'(x)dx$$

$$\xrightarrow[h(x)=f(x)\cdot g(x)]{einsetzen} \quad f(x)\cdot g(x)=\int f'(x)\cdot g(x)dx+\int f(x)\cdot g'(x)dx$$

$$\xrightarrow[Partielle\ Integration]{Ansatz} \quad \int f(x)\cdot g'(x)dx \quad = \quad f(x)\cdot g(x)-\int f'(x)\cdot g(x)dx$$

**Übertrag auf Beispiel:**

$$h(x)=x\cdot e^{x} \quad \rightarrow \quad \int x\cdot e^{x}dx \quad = \quad ???$$

$$\xrightarrow[Partielle\ Integration]{Ansatz} \quad \int f(x)\cdot g'(x)dx \quad = \quad f(x)\cdot g(x)-\int f'(x)\cdot g(x)dx$$

$$Zuordnung: \quad \begin{array}{ll} f(x)=x & g(x)=e^{x} \\ f'(x)=1 & g'(x)=e^{x} \end{array}$$

$$\xrightarrow[Zuordnung]{Durchführung} \quad \int f(x)\cdot g'(x)dx \quad = \quad \int x\cdot e^{x}dx \quad = \quad x\cdot e^{x}-\int 1\cdot e^{x}dx$$

$$\xrightarrow{Integration} \quad \int x\cdot e^{x}dx \quad = \quad x\cdot e^{x}-e^{x}+c \quad = \quad (x-1)\cdot e^{x} \quad = \quad H(x)$$

Probe: $H'(x) \quad = \quad 1\cdot e^{x}+(x-1)\cdot e^{x} \quad = \quad 1\cdot e^{x}+x\cdot e^{x}-1\cdot e^{x} \quad = \quad x\cdot e^{x} \quad = \quad h(x)$

**Problem:** **Falsche Zuordnung**

$$h(x) = x \cdot e^x \quad \rightarrow \quad \int e^x \cdot x \, dx \quad = \quad ???$$

$$\xrightarrow[\text{Partielle Integration}]{\text{Ansatz}} \int f(x) \cdot g'(x) dx \quad = \quad f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

$$Zuordnung: \quad \begin{matrix} f(x) = e^x & g(x) = \frac{1}{2}x^2 \\ f'(x) = e^x & g'(x) = x \end{matrix}$$

$$\xrightarrow[\text{Zuordnung}]{\text{Durchführung}} \int f(x) \cdot g'(x) dx \quad = \quad \int e^x \cdot x \, dx \quad = \quad \frac{1}{2}x^2 \cdot e^x - \int e^x \cdot \frac{1}{2}x^2 dx \; ???$$

## Grundsätzliche Vorgehensweisen:

**(1) Abräumen bzw. Lösen der Polynome (einfaches Berechnen des Integrals)**

**(2) Wiederherstellung des Ausgangsintegrals**

**(3) Ergänzung mit einem konstanten Faktor**

**(4) Mehrmaliges Durchführen der Partiellen Integration**

**Beispiel zu 1:**

## Abräumen bzw. Lösen der Polynome (einfaches Berechnen des Integrals)

$$h(x) = x \cdot \sin(x) \quad \rightarrow \quad \int x \cdot \sin(x) dx \quad = \quad ???$$

$$\xrightarrow[\text{Partielle Integration}]{\text{Ansatz}} \int f(x) \cdot g'(x) dx \quad = \quad f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

$$Zuordnung: \quad \begin{matrix} f(x) = x & g(x) = -\cos(x) \\ f'(x) = 1 & g'(x) = \sin(x) \end{matrix}$$

$$\xrightarrow[\text{Zuordnung}]{\text{Durchführung}} \int f(x) \cdot g'(x) dx \quad = \quad \int x \cdot \sin(x) dx \quad = \quad -x \cdot \cos(x) - \int 1 \cdot [-\cos(x)] dx$$

$$\xrightarrow{\text{Vereinfachung}} \int x \cdot \sin(x) dx \quad = \quad -x \cdot \cos(x) + \int \cos(x) dx$$

$$\xrightarrow{\text{Integration}} \int x \cdot \sin(x) dx \quad = \quad -x \cdot \cos(x) + \sin(x) + c \quad = \quad H(x)$$

$$\text{Probe:} \quad H'(x) \quad = \quad -1 \cdot \cos(x) - x \cdot [-\sin(x)] + \cos(x) \quad = \quad x \cdot \sin(x) \quad = \quad h(x)$$

**Beispiel zu 2:** **Wiederherstellung des Ausgangsintegrals**

**Beispiel:**

$$h(x)=\cos^2(x) \quad \rightarrow \quad \int \cos(x)\cdot\cos(x)\,dx \quad = \quad ???$$

$$\xrightarrow[\textit{Partielle Integration}]{\textit{Ansatz}} \int f(x)\cdot g'(x)\,dx \quad = \quad f(x)\cdot g(x)-\int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

$$\textit{Zuordnung}: \quad \begin{matrix} f(x)=\cos(x) & g(x)=\sin(x) \\ f'(x)=-\sin(x) & g'(x)=\cos(x) \end{matrix}$$

$$\xrightarrow[\textit{Zuordnung}]{\textit{Durchführung}} \int f(x)\cdot g'(x)\,dx \quad = \quad \int \cos(x)\cdot\cos(x)\,dx$$

$$= \quad \cos(x)\cdot\sin(x)-\int\left[-\sin(x)\right]\cdot\sin(x)\,dx$$

$$\xrightarrow{\textit{Zusammenfassen}} \int \cos^2(x)\,dx \quad = \quad \cos(x)\cdot\sin(x)+\int \sin^2(x)\,dx$$

$$\xrightarrow{\sin^2 x+\cos^2 x=1} \int \cos^2(x)\,dx \quad = \quad \cos(x)\cdot\sin(x)+\int\left[1-\cos^2(x)\right]dx$$

$$\xrightarrow{\textit{Summanden}} \int \cos^2(x)\,dx \quad = \quad \cos(x)\cdot\sin(x)+\int 1dx-\int \cos^2(x)\,dx$$

$$\xrightarrow{+\int \cos^2(x)dx} 2\int \cos^2(x)\,dx \quad = \quad \cos(x)\cdot\sin(x)+\int 1dx$$

$$\xrightarrow{\textit{Intergral}} 2\int \cos^2(x)\,dx \quad = \quad \cos(x)\cdot\sin(x)+x+c$$

$$\xrightarrow{:2} \int \cos^2(x)\,dx \quad = \quad \frac{1}{2}\cos(x)\cdot\sin(x)+\frac{1}{2}x+d$$

**Beispiel zu 3:** **Ergänzung mit einem konstanten Faktor**

**(im Normalfall: neutrales Element der Multiplikation => 1)**

**⇨ Vgl. Integration von ln(x)**

$$h(x)=\ln(x) \quad \rightarrow \quad \int \ln(x)\cdot 1dx \quad = \quad ???$$

$$\xrightarrow[\text{Partielle Integration}]{\text{Ansatz}} \int f(x)\cdot g'(x)dx \quad = \quad f(x)\cdot g(x)-\int f'(x)\cdot g(x)dx$$

$$\text{Zuordnung}: \quad \begin{matrix} f(x)=\ln(x) & g(x)=x \\ f'(x)=\frac{1}{x} & g'(x)=1 \end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} f(x)=1 & g(x)=??? \\ f'(x)=0??? & g'(x)=\ln(x) \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{Zuordnung}]{\text{Durchführung}} \int f(x)\cdot g'(x)dx \quad = \quad \int \ln(x)\cdot 1dx$$

$$= \quad \ln(x)\cdot x-\int \frac{1}{x}\cdot xdx$$

$$\xrightarrow{\text{Zusammenfassen}} \int \ln(x)\cdot 1dx \quad = \quad = \quad \ln(x)\cdot x-\int 1dx$$

$$\xrightarrow{\text{Integration}} \int \ln(x)\cdot 1dx = \quad \ln(x)\cdot x-x+c \quad = \quad (\ln(x)-1)\cdot x$$

Probe:

$$\frac{dH}{dx}\left[(\ln(x)-1)\cdot x\right] \quad = \quad \frac{1}{x}\cdot x+(\ln(x)-1)\cdot 1 \quad = \quad 1+\ln(x)-1 \quad = \quad \ln(x)$$

**Beispiel A zu 4:** **Mehrmaliges Durchführen der Partiellen Integration**

$$h(x) = x^2 \cdot e^x \quad \rightarrow \quad \int x^2 \cdot e^x dx \quad = \quad ???$$

$$\xrightarrow[\text{Partielle Integration}]{\text{Ansatz}} \int f(x) \cdot g'(x) dx \quad = \quad f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

$$\text{Zuordnung}: \quad \begin{matrix} f(x) = x^2 & g(x) = e^x \\ f'(x) = 2x & g'(x) = e^x \end{matrix}$$

$$\int x^2 \cdot e^x dx \quad = \quad x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x dx \ [\rightarrow \text{ muss noch einmal separat partiell integriert werden}]$$

$$\int 2x \cdot e^x dx$$

$$\xrightarrow[\text{Partielle Integration}]{\text{Ansatz}} \int f(x) \cdot g'(x) dx \quad = \quad f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

$$\text{Zuordnung}: \quad \begin{matrix} f(x) = 2x & g(x) = e^x \\ f'(x) = 2 & g'(x) = e^x \end{matrix}$$

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx \quad = \quad 2x \cdot e^x - \int 2 \cdot e^x dx \quad = \quad 2x \cdot e^x - 2 \cdot e^x + c$$

$$\xrightarrow[\text{eingesetzt}]{\int 2x \cdot e^x dx = 2x \cdot e^x - 2 \cdot e^x + c}$$

$$\int x^2 \cdot e^x dx \quad = \quad x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x dx \quad = \quad x^2 \cdot e^x - (2x \cdot e^x - 2 \cdot e^x - c) \quad = \quad e^x (x^2 - 2x + 2) - c$$

Probe:

$$\frac{dH}{dx}\left[e^x (x^2 - 2x + 2)\right] = e^x (x^2 - 2x + 2) + e^x (2x - 2) = e^x (x^2 - 2x + 2 + 2x - 2) = x^2 \cdot e^x$$

## Beispiel B zu 4: Mehrmaliges Durchführen der Partiellen Integration

**Beispiel:** Gesucht ist das unbestimmte Integral $\int \sin x \cdot x^2 \, dx$.

Lösung:
Wir wenden auf das gegebene Integral zunächst die Produktintegration an, wobei wir $u'(x) = \sin$ und $v(x) = x^2$ setzen. Wir erhalten

$$\int \underset{u'}{\sin x} \cdot \underset{v}{x^2} \, dx = \underset{u}{(-\cos x)} \cdot \underset{v}{x^2} - \int \underset{u}{(-\cos x)} \cdot \underset{v'}{2x} \, dx$$

$$= (-\cos x) \cdot x^2 + 2 \int \cos x \cdot x \, dx .$$

Das rechtsseitige Integral ist ähnlich strukturiert wie das Ausgangsintegral, jedoch etwas einfacher, da der Grad des Polynomfaktors um 1 gesunken ist.
Wir wenden die Produktintegration nun noch einmal an, und zwar auf das rechtsseitige Integral. Dieses wird so auf ein einfaches Grundintegral zurückgeführt.

$$\int \underset{u'}{\text{cox}\, x} \cdot \underset{v}{x} \, dx = \underset{u}{\sin x} \cdot \underset{v}{x} - \int \underset{u}{\sin x} \cdot \underset{v'}{1} \, dx$$

$$= \sin x \cdot x + \cos x$$

Wir setzen das Ergebnis dieser letzten Produktintegration nun in die obige Gleichung ein und erhalten das gesuchte unbestimmte Integral.

Resultat:

$$\int \sin x \cdot x^2 \, dx = (-\cos x) \cdot x^2 + 2\,(\sin x \cdot x + \cos x) + C$$

$$= 2x \cdot \sin x + \cos x \cdot (2 - x^2) + C$$