Partielle Integration

$$\int_a^b u'v\,dx = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b v'u\,dx$$

=> Mit Exponential-Funktion (Basis e)

(1) $\int_0^2 x \cdot e^x\,dx$

(2) $\int_0^2 2x \cdot e^{x+1}dx$

(3) $\int_{-1}^1 x^2 \cdot e^{-x}dx$

=> Mit Logarithmus-Funktion (ln)

(4) $\int_1^e x \cdot \ln x\,dx$

(5) $\int_1^{e^2} x^2 \cdot \ln x\,dx$

(6) $\int_a^b \ln x\,dx = \int_a^b 1 \cdot \ln x\,dx$

(7) $\int (\ln x)^2\,dx$

Aufgaben zu e-Funktionen

(1) $\int_{\ln 2}^{\ln 4} \left(2 - e^x\right)dx$

(2) $\int_{-t}^{t} te^{t-x}dx$

(3) $\int_0^4 \left(x - e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx$

(4) $\int_{\ln 3}^{\ln 9} \left(e^x - e^{-x}\right)^2 dx$

(5) $\int_1^2 \left(e^{2x} - 4e^{-x}\right)dx$

(6) $\int_0^2 \frac{x}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}\,dx$

(7) $\int_0^1 \frac{6x}{e^{x^2+1}}dx$

(8) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{4 - e^x}dx$

(9) $\int_0^{\ln 2} e^{-x}\left(e^{-x} + 1\right)^2 dx$

Aufgaben zu LN-Funktionen

(10) $\int_{-4}^{1} \ln(4 - 2x)\,dx$

(11) $\int_1^e \ln\left(x^2\right)dx$

(12) $\int_0^{e-1} x^2 - 2\ln(x+1)\,dx$

(13) $\int_1^e \frac{2 - \ln x}{4x}dx$

(14) $\int_0^3 \frac{1}{2}x \cdot \ln\left(x^2 + 1\right)dx$

(15) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x \cdot \ln\left(4 - x^2\right)dx$

(16) $\int_1^2 \ln\left(\frac{x}{4 - x}\right)dx$

(17) $\int_{\sqrt{10}}^{5} \ln\left(x^2 - 9\right)dx$

Aufgaben zur Partiellen Integration

(18) $\int_0^8 2x \cdot e^{2-x} dx$

(19) $\int_2^{-2} (x^2 - 4) \cdot e^{-x} dx$

(20) $\int_0^2 x^2 \cdot e^{x-1} dx$

(21) $\int_0^1 x^3 \cdot e^{-x} dx$

(22) $\int_1^2 x^2 (1 - \ln x^2) dx$

(23) $\int_e^{e^2} x(\ln x - 1)\, dx$

(24) $\int_0^1 x \cdot \ln(2-x)\, dx$

(25) $\int_{-1}^{e-2} 2 \cdot (\ln(x+2))^2\, dx$

Übung 1

Weisen Sie die folgende Rekursionsformel nach:

$$\int x^n \cos x\, dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x\, dx \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Beispiel zur Rekursion:

Mithilfe der Produktintegration können Rekursionsformeln ermittelt werden.

Beispiel: Weisen Sie die folgende Rekursionsformel nach:

$$\int x^n \sin x\, dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x\, dx \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Lösung:
Produktintegration des Ausgangsintegrals:

$$\int \underset{u}{x^n} \underset{v'}{\sin x}\, dx = -\underset{u}{x^n} \underset{v}{\cos x} + \int \underset{u'}{nx^{n-1}} \underset{v}{\cos x}\, dx$$

$$= -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x\, dx$$

Das Restintegral $\int x^{n-1} \cos x\, dx$ ist von demselben Typ wie das Ausgangsintegral, allerdings von niedrigerer Ordnung.

Produktintegration

2. Bestimmen Sie die folgenden Integrale durch partielle Integration vom Typ 1 „Abräumen“.

a) $\int x \cdot \cos x \, dx$ b) $\int x^2 \cdot \cos x \, dx$ c) $\int (ax+b) \cdot \sin x \, dx$

d) $\int (ax^2+bx+c) \cdot \cos x \, dx$ e) $\int x \cdot \cos ax \, dx \quad (a \in \mathbb{R})$ f) $\int x^4 \cdot \sin x \, dx$

3. Bestimmen Sie die folgenden Integrale durch partielle Integration vom Typ 2 „Wiederentstehung des Ausgangsintegrals“.

a) $\int \sin x \cdot \cos x \, dx$ b) $\int \sin^3 x \, dx$ c) $\int \sin 2x \cdot \cos \frac{1}{2} x \, dx$

4. Beweisen Sie, dass für eine differenzierbare Funktion u(x) gilt:

a) $\int u \cdot u' \, dx = \frac{1}{2} u^2 + C,$

b) $\int u^n \cdot u' \, dx = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C \quad (n \in \mathbb{N}).$

5. Weisen Sie die folgenden Rekursionsformeln nach.

a) $\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \cdot \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx \qquad (n \in \mathbb{N})$

b) $\int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cdot \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx \qquad (n \in \mathbb{N})$