MUSTERLÖSUNG

1. Aufgabe

Die Funktion f_k ist für $k \in \Re^+$ gegeben durch $f_k(x) = -kx^3 + 3k^2x^2$ mit $x \in \Re$.

Mit G_k wird der Graph zu f_k bezeichnet.

a) Untersuchen Sie f_k auf Symmetrie und Nullstellen.

Lösung:

$$Symmetrie:$$
$$f_k(-x) = -k(-x)^3 + 3k^2(-x)^2 = kx^3 + 3k^2x^2 \neq f_k(x) \quad und \quad \neq -f_k(x)$$
$$keine\ Symmetrie$$

$$Nullstellen:$$
$$f_k(x) = -kx^3 + 3k^2x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad kx^2(-x+3k) = 0$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = 0\,(doppelt) \quad \wedge \quad x_2 = 3k$$

b) Bestimmen Sie Lage und Art der Extrempunkte.

Lösung:

$$f_k(x) = -kx^3 + 3k^2x^2$$
$$\Rightarrow \quad f_k'(x) = -3kx^2 + 6k^2x \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 3kx(-x+2k) = 0$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = 2k$$
$$\Rightarrow \quad f_k''(x) = -6kx + 6k^2$$
$$\Rightarrow \quad f_k''(0) = 6k^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad Min(0 \mid 0)$$
$$und \quad f_k''(2k) = -6k^2 \quad \Rightarrow \quad Max(2k \mid 4k^4)$$

c) Bestimmen Sie die Koordinaten der Wendepunkte.

Lösung:

$$f_k(x) = -kx^3 + 3k^2x^2$$

$$\Rightarrow \quad f_k''(x) = -6kx + 6k^2 \overset{!}{=} 0$$

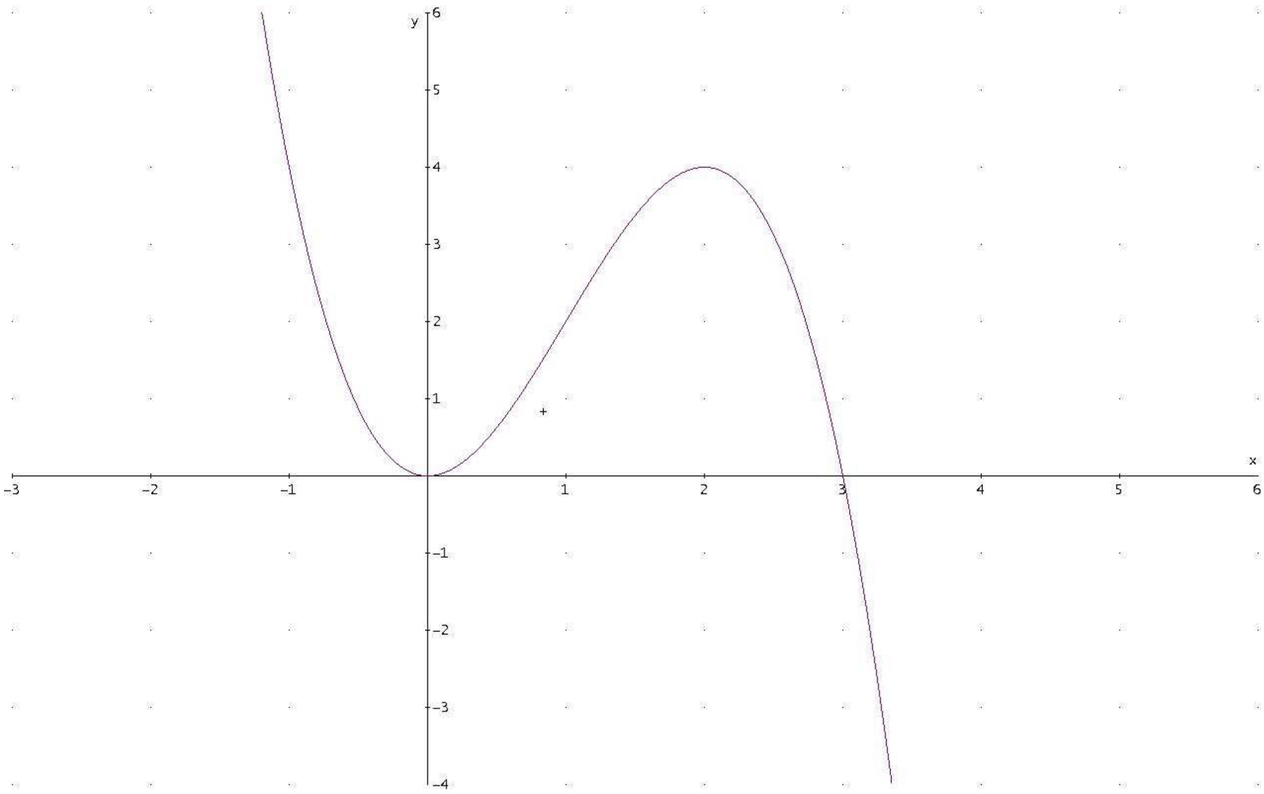
$$\Rightarrow \quad x = k$$

$$\Rightarrow \quad f_k'''(x) = -6k > 0 \quad \Rightarrow \quad W\left(k \mid 2k^4\right)$$

d) Notieren Sie in einer Tabelle für k=1 die Koordinaten der Extrempunkte und Wendepunkte. Skizzieren Sie mit Hilfe dieser Tabelle den Graphen zu f_1 in ein Koordinatensystem mit x∈[- 3 ; 6].

Lösung:

$$f_1(x) = -x^3 + 3x^2 \quad \Rightarrow \quad W(1 \mid 2) \quad Min(0 \mid 0) \quad Max(2 \mid 4)$$



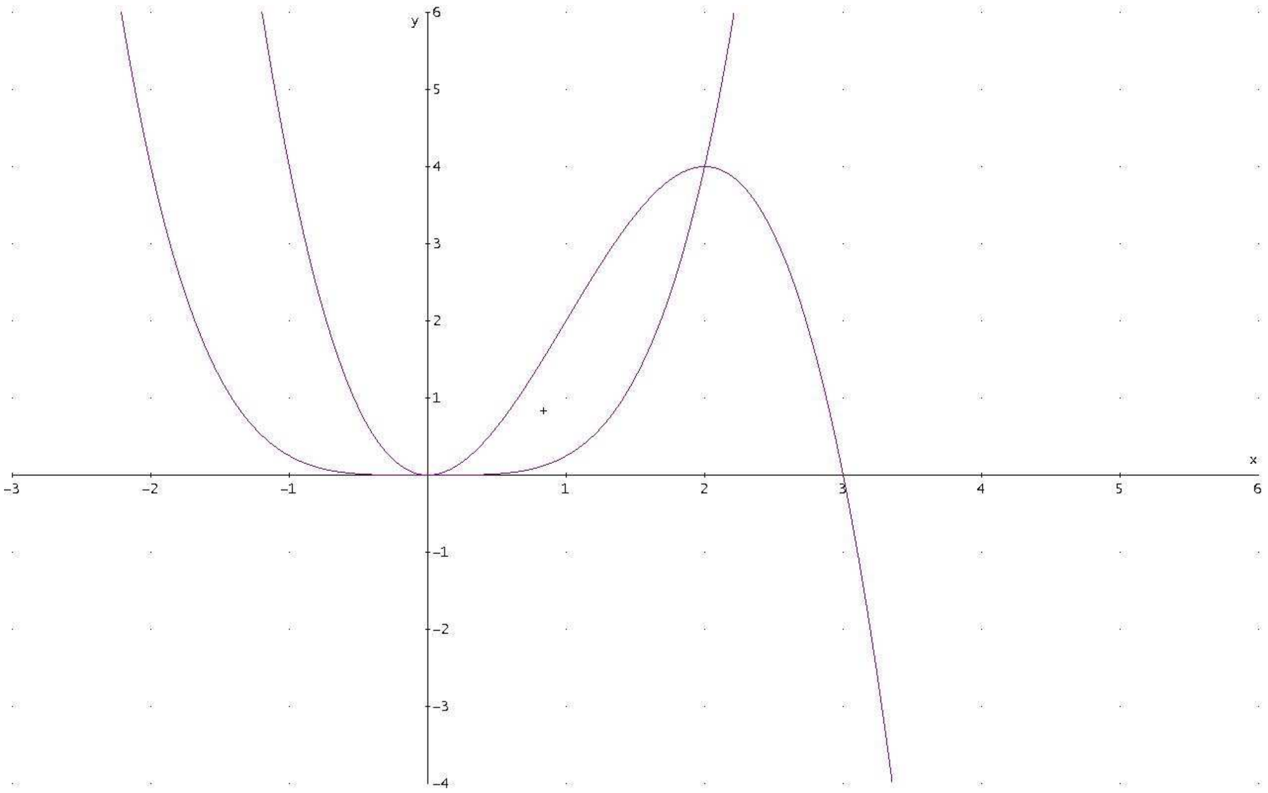
e) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion g, auf deren Graph die Hochpunkte von f_k liegen und zeichnen Sie deren Graph in das Koordinatensystem von Aufgabe d).

Lösung:

$$Max\left(2k \;\middle|\; 4k^4\right)$$

$$x = 2k \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{2}x \quad \xrightarrow{\text{einsetzen in y-Wert}} \quad y = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)^4$$

$$y = \frac{1}{4}x^4$$



f) Zeigen Sie, dass die Graphen von f_{k_1} und f_{k_2} für $k_1 \neq k_2$ zwei gemeinsame Punkte haben.

Lösung:

$$f_{k_1}(x) = -k_1x^3 + 3k_1^{\,2}x^2 \quad und \quad f_{k_2}(x) = -k_2x^3 + 3k_2^{\,2}x^2 \quad mit\ k_1 \neq k_2$$

$$\Rightarrow \quad f_{k_1}(x) = f_{k_2}(x)$$

$$\Rightarrow \quad -k_1x^3 + 3k_1^{\,2}x^2 = -k_2x^3 + 3k_2^{\,2}x^2$$

$$\Rightarrow \quad -k_1x^3 + 3k_1^{\,2}x^2 + k_2x^3 - 3k_2^{\,2}x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2\left(-k_1x + 3k_1^{\,2} + k_2x - 3k_2^{\,2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1(0 \mid 0)$$

und

$$-k_1x + 3k_1^{\,2} + k_2x - 3k_2^{\,2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x(-k_1 + k_2) = 3k_2^{\,2} - 3k_1^{\,2}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{3\left(k_2^{\,2} - k_1^{\,2}\right)}{-k_1 + k_2} = \frac{3(k_2 - k_1)(k_2 + k_1)}{-k_1 + k_2} = 3(k_2 + k_1)$$

Es existieren zwei gemeinsame Punkte.

g) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Geraden auf der die drei Punkte des Schaubildes von G_1 mit den x-Werten 2, -2 und 3 liegen.

Zeichnen Sie diese Gerade in das Koordinatensystem von Aufgabe d.

Diese Gerade und G_1 schließen zwei Flächen ein.
Berechnen Sie den Inhalt der kleineren Fläche.

Lösung:

$$f_1(x) = -x^3 + 3x^2 \quad \Rightarrow \quad A(2 \mid 4) \quad B(-2 \mid 20) \quad C(3 \mid 0)$$

Geradengleichung $g_{AB}(x)$

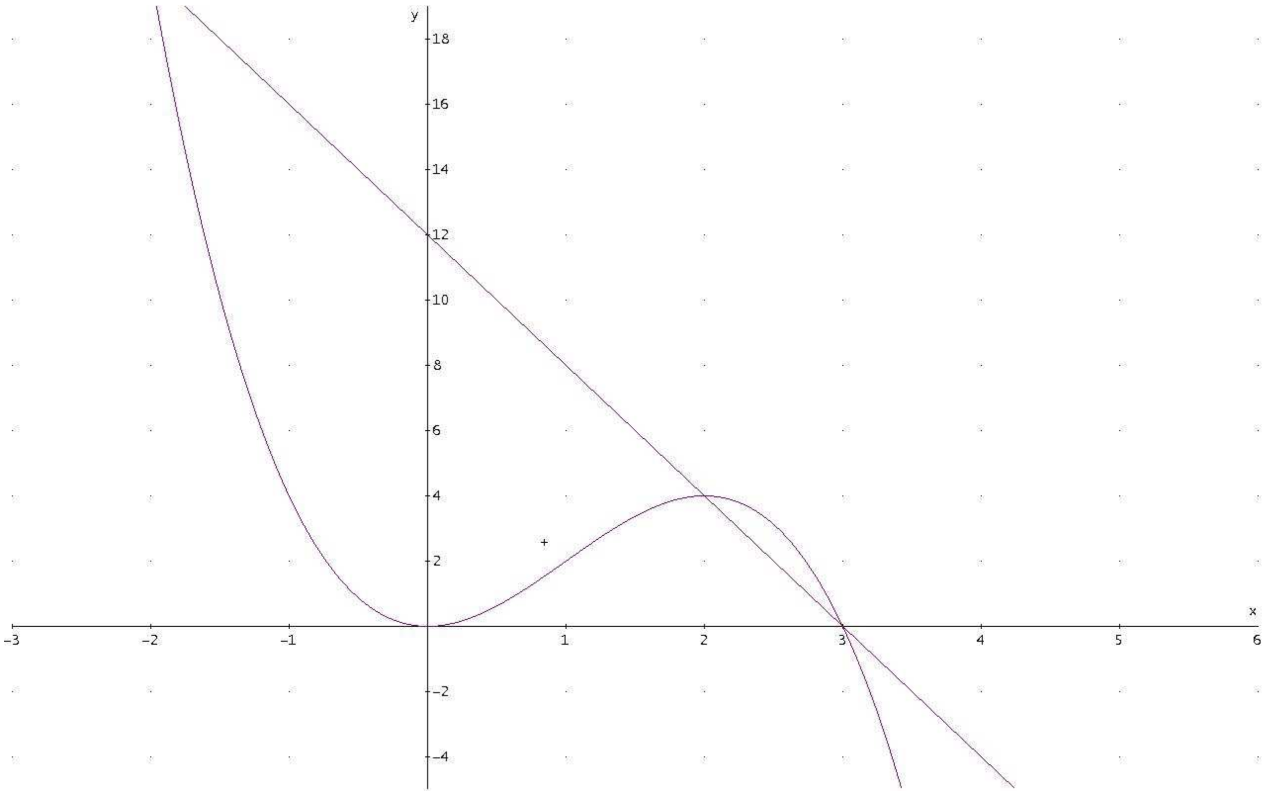
$$Steigung: \quad m = \frac{20-4}{-2-2} \quad \Rightarrow \quad m = -4$$

$$y-Achsenabschnitt: \quad 4 = (-4)\cdot 2 + b \quad \Rightarrow \quad b = 12$$

$$\Rightarrow \quad g_{AB}(x) = -4x + 12$$

Punktprobe für Punkt C: $\quad g_{AB}(3) = (-4)\cdot 3 + 12 = 0$

Punkt C liegt auf der Geraden.



Ermittlung der Fläche: (Schnittpunkte sind bekannt!)

$$f_1\left(x\right)=-x^3+3x^2 \quad und \quad g_{AB}\left(x\right)=-4x+12$$

$$\int_2^3\left[\left(-x^3+3x^2\right)-\left(-4x+12\right)\right]dx=$$

$$\int_2^3\left(-x^3+3x^2+4x-12\right)dx=\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3+2x^2-12x\right]_2^3=$$

$$-\frac{81}{4}+27+18-36-\left(-6+8+8-24\right)=\frac{3}{4}$$

h) Für welche k liegt B(3/-6) auf G_k ?

Lösung:

$$f_k\left(x\right)=-kx^3+3k^2x^2$$

$$\Rightarrow \quad f_k\left(3\right)=-6 \quad \Rightarrow \quad -27k+27k^2=-6 \quad \Rightarrow \quad 27k^2-27k+6=0$$

$$\Rightarrow \quad k_{1/2}=\frac{27\pm\sqrt{729-648}}{54}=\frac{27\pm9}{54} \quad \Rightarrow \quad k_1=\frac{2}{3} \quad \wedge \quad k_2=\frac{1}{3}$$