

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Aufgabensammlung

Aufgabe für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	Lineare Algebra	CAS

1 Aufgabe

Ein Forstbetrieb zieht auf verschiedenen Waldflächen Tannen auf. Entsprechend ihrer Höhe werden die Tannen den Größenklassen K (klein), M (mittel) und G (groß) zugeordnet. Jeweils zu Beginn einer Wachstumsperiode wird eine Bestandsaufnahme durchgeführt. Bei den im Folgenden modellhaft beschriebenen Übergängen zwischen den drei Größenklassen innerhalb einer Wachstumsperiode ist jeweils berücksichtigt, dass beschädigte, kranke und abgestorbene Bäume im Laufe jeder Wachstumsperiode aus dem Bestand entfernt werden.

1 Auf einer der Waldflächen erreichen innerhalb einer Wachstumsperiode 50 % der Tannen der Größenklasse K die Größenklasse M und 10 % die Größenklasse G, 30 % verbleiben in der Größenklasse K. Von den Tannen der Größenklasse M erreichen 55 % die Größenklasse G, 40 % verbleiben in der Größenklasse M. Der Anteil der Tannen der Größenklasse G, die auch am Ende einer Wachstumsperiode noch in dieser Größenklasse enthalten sind, beträgt 98 %.

a Stellen Sie das beschriebene Wachstumsverhalten in einem Übergangsdiagramm dar.

b Ermitteln Sie ohne Verwendung von Matrizen den prozentualen Anteil der Tannen der Größenklasse K, die sich nach zwei Wachstumsperioden in der Größenklasse G befinden.

BE

3

3

- 2 Auf einer zweiten Waldfläche wird eine andere Art von Tannen aufgezogen. Für diese Tannen können die Übergänge zwischen den Größenklassen innerhalb einer Wachstumsperiode durch die folgende Tabelle beschrieben werden:

von \ nach	K	M	G
K	0,25	0	0
M	0,7	0,55	0
G	0	0,4	0,95

Eine Bestandsaufnahme ergibt 450 Tannen der Größenklasse K, 4230 Tannen der Größenklasse M und 5320 Tannen der Größenklasse G.

- a Beschreiben Sie am Beispiel des Übergangs von Tannen der Größenklasse K, wie sich das Wachstumsverhalten der Tannen auf dieser Waldfläche innerhalb einer Wachstumsperiode von dem der in Aufgabe 1 betrachteten Tannen unterscheidet.

2

Im Folgenden werden nur die Tannen auf der zweiten Waldfläche betrachtet.

- b Bestimmen Sie die Anzahl der Tannen in den einzelnen Größenklassen zwei Wachstumsperioden nach der Bestandsaufnahme.

2

- c Bestimmen Sie die Anzahl der Tannen in den einzelnen Größenklassen zwei Wachstumsperioden vor der Bestandsaufnahme.

3

Im Folgenden soll von dem allgemeinen Bestandsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} k \\ m \\ g \end{pmatrix}$ ausgegangen werden,

wobei k die Anzahl der Tannen der Größenklasse K, m die Anzahl der Tannen der Größenklasse M und g die Anzahl der Tannen der Größenklasse G bezeichnet.

- d Zeigen Sie, dass die Anzahl der Tannen innerhalb einer Wachstumsperiode um 5 % abnimmt.

3

- e Am Ende einer Wachstumsperiode, innerhalb derer sich der Bestand zunächst gemäß der gegebenen Tabelle entwickelt hat, werden 56 % des dann vorhandenen Bestands an gesunden Tannen der Größenklasse G gefällt. Bestimmen Sie, wie viele Tannen nach dem Fällen insgesamt neu angepflanzt werden müssen, damit die Anzahl der Tannen anschließend mit derjenigen zu Beginn dieser Wachstumsperiode übereinstimmt.

4

20

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1	<p>a</p> <pre> graph TD K((K)) -- 0,3 --> K K -- 0,5 --> M((M)) M -- 0,4 --> M M -- 0,55 --> G((G)) G -- 0,98 --> G K -- 0,1 --> G </pre>	3
	<p>b</p> $0,3 \cdot 0,1 + 0,5 \cdot 0,55 + 0,1 \cdot 0,98 = 40,3 \%$	3
2	<p>a</p> <p>Im Vergleich zum Wachstumsverhalten der in Aufgabe 1 betrachteten Tannen verbleiben von den Tannen auf dieser Waldfläche innerhalb einer Wachstumsperiode weniger in der Größenklasse K, während ein größerer Anteil der Tannen in die Größenklasse M übergeht. Einen direkten Übergang von der Größenklasse K in die Größenklasse G gibt es auf dieser Waldfläche nicht.</p>	2
	<p>b</p> <p>Mit $A = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 & 0 \\ 0,7 & 0,55 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,95 \end{pmatrix}$ ergibt sich: $A^2 \cdot \begin{pmatrix} 450 \\ 4230 \\ 5320 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 28 \\ 1532 \\ 7465 \end{pmatrix}$</p> <p>Zwei Wachstumsperioden nach der Bestandsaufnahme sind etwa 28 Tannen in der Größenklasse K, 1532 in der Größenklasse M und 7465 in der Größenklasse G enthalten.</p>	2
	<p>c</p> <p>$A^2 \cdot \begin{pmatrix} k \\ m \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 450 \\ 4230 \\ 5320 \end{pmatrix}$ liefert $\begin{pmatrix} k \\ m \\ g \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 7200 \\ 655 \\ 3226 \end{pmatrix}$.</p> <p>Zwei Wachstumsperioden vor der Bestandsaufnahme waren etwa 7200 Tannen in der Größenklasse K, 655 in der Größenklasse M und 3226 in der Größenklasse G enthalten.</p>	3
	<p>d</p> <p>$A \cdot \begin{pmatrix} k \\ m \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 \cdot k \\ 0,7 \cdot k + 0,55 \cdot m \\ 0,4 \cdot m + 0,95 \cdot g \end{pmatrix}$</p> <p>$0,25 \cdot k + 0,7 \cdot k + 0,55 \cdot m + 0,4 \cdot m + 0,95 \cdot g = 0,95 \cdot (k + m + g)$</p> <p>Am Ende der Wachstumsperiode sind noch 95 % der Tannen erhalten, die Anzahl der Tannen hat also um 5 % abgenommen.</p>	3

e	Anzahl der gefälltten Tannen: $0,56 \cdot (0,4 \cdot m + 0,95 \cdot g)$ Anzahl der aus sonstigen Gründen entfernten Tannen: $0,05 \cdot (k + m + g)$ Damit ergibt sich für die Anzahl der neu anzupflanzenden Tannen: $0,05 \cdot k + 0,274 \cdot m + 0,582 \cdot g$	4
		20

3 Standardbezug

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen ¹						Anforderungs-bereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3	X								I		I	X		
b	3	X						II	II		I			X	
2 a	2	X							I	I		I	X		
b	2	X							I	I	I		X		
c	3	X							II		II			X	
d	3	X					II	II			II			X	
e	4	X						III	III			II			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist passend zur Konzeption der Aufgaben der Aufgabensammlung und des Abituraufgabenpools ein Bewertungsschlüssel² vorgesehen, der angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

¹ Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

² Der Bewertungsschlüssel ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.