12. Jgst.	4. Kursarbeit	Datum: 04.04.2017
Klasse: BGY LK 2	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

Thema: Analytische Geometrie; Punkte im R^3; Geraden/Ebenen; Lagebeziehungen; Winkel; Skalar- & Vektorprodukt; …

Name:	
Punkte:	Note:

Aufgabe 1: Geradengleichung und Punktprobe | 15 | |

Gegeben sei die Gerade g, die durch die Punkte **P(3/4/2)** und **Q(1/8/7)** festgelegt ist.

a) Geben Sie einen weiteren Punkt an, der auf der Geraden g liegt, und einen zweiten Punkt, der zwischen P und Q liegt.

b) Prüfen Sie, ob die beiden Punkte **S(2/3/5)** und **T(-3/-8/12)** auf der Geraden g liegen.

c) Ermitteln Sie einen Wert für **t**, so dass sich der Punkt **R(t/8t/7)** auf der Geraden g befindet.

d) Die Strecke zwischen P und Q soll in drei gleich große Abschnitte unterteilt werden.
Berechnen Sie die jeweiligen Teilungspunkte.

| 36 | |

Aufgabe 2: Ebenen

Gegeben sind die drei Punkte **A(10 / -4 / 5), B(-2 / 3 / 8) und C(1 / 7 / -9).**
Bilden Sie eine Ebenengleichung, die alle drei Punkte enthält

a) in Parameterform
b) in Normalenform
c) in Koordinatenform.

d) Welche Lagebeziehungen können Ebenen im R^3 zueinander haben?

e) Erklären Sie kurz, in welcher Form, die Lagebeziehungen geprüft bzw. getestet werden können.

Untersuchen Sie nun die Lagebeziehungen der Ebenen zueinander:

f) $E_1: x - 2y + z = 2$ $\quad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

g) $E_1: 3x + 2y + z = 4$ $\quad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

h) $E_1: x + 2y - z = 2$ $\quad E_2: \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0$

i) Bilden Sie aus der gegebenen Ebene die Normalen- und die Parameterform:

$$E: 4x + 8y - 6z = 12$$

30	

Aufgabe 3: Ebene – Dreieck - Pyramide

Gegeben sind die drei Punkte **A(2 / 1 / 1), B(6 / 4 / 1) und C(3 / 8 / 1).**

a) Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC in der Ebene

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \quad mit\ s,t \in \Re$$ liegt.

b) Welche besondere Lage hat diese Ebene?

c) Untersuchen Sie, ob das Dreieck gleichschenklig und rechtwinklig ist.

d) Geben Sie die Koordinaten eines Punktes D an, so dass die Pyramide ABCD ein Volumen von 125 VE hat.

Eine Gerade verläuft durch den Punkt Q(7 / 6 / 5) in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

e) Bestimmen Sie den Punkt, in dem diese Gerade die Ebene schneidet.

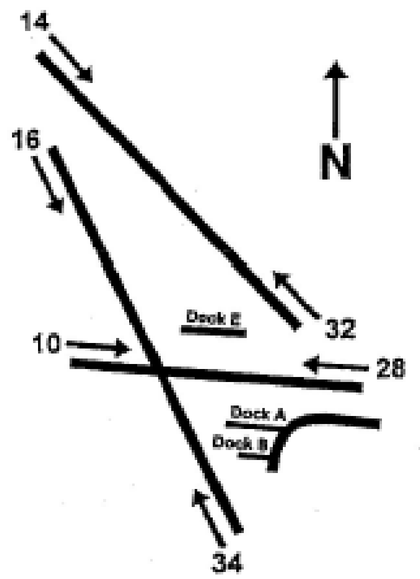
f) Begründen Sie, warum die Gerade im Innern des Dreiecks ABC auf die Ebene trifft.

Aufgabe 4: **Flughafen Zürich-Kloten**

24	

Der Flughafen Zürich-Kloten besitzt drei Landebahnen, die jeweils in beiden Richtungen benutzt werden können. (siehe Abbildung)

Das Flughafengelände liegt in der x_1x_2-Ebene. Die x_1-Achse des Koordinatensystems zeigt nach Süden, die x_2-Achse nach Osten.
Die Landebahn 14 verläuft in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.
Alle Ortskoordinaten sind in Meter angegeben.



Das Flugzeug F1 befindet sich im Landeanflug auf den Flughafen Zürich-Kloten.
Zum Zeitpunkt t = 0 fliegt es in 1200 m Höhe.
Der Verlauf des Landeanflugs wird durch folgende Geradengleichung dargestellt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}-14000\\-13000\\1200\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}50\\50\\-5\end{pmatrix}$$

Dabei ist t die Zeit in Sekunden.

a) Bestimmen Sie die Strecke, die das Flugzeug F1 in einer Minute zurücklegt.
b) Begründen Sie, dass der Landeanflug von F1 in Richtung der Landebahn 14 erfolgt.
c) In welchem Punkt landet das Flugzeug?
Anmerkung: Die z-Komponente hat dann den Wert 0.

Das Flugzeug F2 befindet sich ebenfalls im Landeanflug auf den Flughafen Zürich-Kloten.
F2 befindet sich zum Zeitpunkt **t = 0** im Punkt **P(-23.000 / -22.000 / 2.100)** und soll nach 7 Minuten im Punkt **Q(-2.000 / -1.000 / 0)** landen.

d) Welche Strecke muss das Flugzeug F2 bis zur Landung zurücklegen?
e) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden, die den Landeanflug von F2 beschreibt.
f) Gibt es bei der Landung der beiden Flugzeuge die Gefahr einer Kollision?
Vergleichen Sie bitte die Landeanflüge der beiden Flugzeuge.

Aufgabe 5: Lagebeziehungen von Geraden | 25 | |

Prüfen Sie die Lagebeziehungen der Geraden jeweils zueinander:

a) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ *und* $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$

b) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$ *und* $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$

c) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix}$ *und* $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$

d) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ *und* $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}$

e) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ *und* $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\-1\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}$

Anmerkung:
Im Falle eines Schnitts bitte auch den Schnittpunkt und Schnittwinkel ermitteln!

Aufgabe 6: **Die Tribüne**

20	

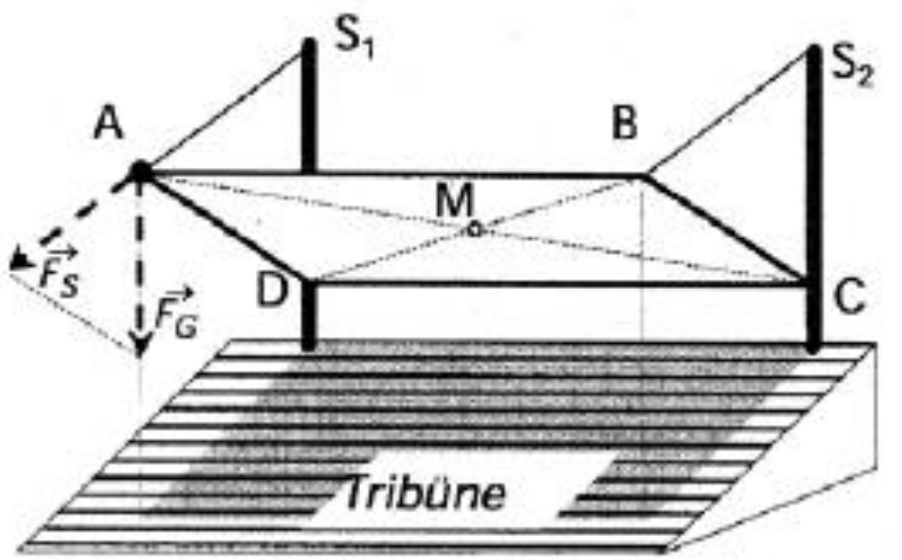
In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte **A(6 / -12 / 22), B(38 / 4 / 22) und M(19 / 2 / 19)** sowie die **Ebene** $E_1: 2x-4y+5z=65$ gegeben.

a) Die Punkte A, B und M bestimmen die Ebene E_2. Berechnen Sie eine **Ebenengleichung** von E_2 in Koordinatenform und den **Winkel**, den E_2 mit der xy-Koordinatenebene einschließt.

Anmerkung: mögliches Ergebnis $E_2: -x+2y+5z=80$

b) Zeigen Sie, dass die Punkte ABCD **ein Rechteck bilden**, wobei M der Diagonalenschnittpunkt sein soll.

Das Dach über dem Teilbereich einer Tribüne kann durch das Rechteck $ABCD$ aus Aufgabenteil b) beschrieben werden, wenn 1LE im Koordinatensystem 1m entspricht und die Horizontalebene durch die x_1x_2-Ebene dargestellt wird.
In den Punkten C und D ist das Dach an zwei zur Horizontalebene senkrecht stehenden Masten befestigt. Von den Punkten $S_1(0\,|0\,|26)$ und $S_2(32\,|16\,|\,26)$ führt jeweils ein Befestigungsseil zu den Punkten A bzw. B.
Die Tribüne liege in der Ebene E_1.



Die Punkte **A'(6 / -12 / 1), B', C' und D'** seien die Projektionen der Punkte A, B, C und D auf die Tribüne, die durch zur Horizontalebene senkrechte Strahlen entstehen.

c) Wie lauten die Koordinaten von **B', C' und D'** ?

Lösungen

(1) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

a) $k = 2: \quad (-1 / 12 / 12)$

$k = \frac{1}{2}: \quad (2 / 6 / 4{,}5)$ ~~4~~ 3

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow S \notin g$

$\begin{pmatrix} -3 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ 10 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow T \notin g$ 4

c) $\begin{pmatrix} t \\ 8t \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{array}{l} \Rightarrow t = 1 \\ \Rightarrow t = 1 \\ \Rightarrow 5 = 5k \rightsquigarrow k = 1 \end{array}\right\} t = 1 \rightsquigarrow R(1/8/7)$

2

d) $k_1 = \frac{1}{3} \qquad k_2 = \frac{2}{3}$

$A\left(\frac{7}{3} / \frac{16}{3} / \frac{11}{3}\right) \qquad B\left(\frac{5}{3} / \frac{20}{3} / \frac{16}{3}\right)$ 6

Σ 15

(2)

a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -12 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -9 \\ 11 \\ -14 \end{pmatrix}$ 4

b) $\begin{pmatrix} -12 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -9 \\ 11 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -131 \\ -195 \\ -69 \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} -12 \\ 7 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -9 \\ 11 \end{matrix}$

$E: \begin{pmatrix} -131 \\ -195 \\ -69 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \right] = 0$ 5

c) $E: -131x - 195y - 69z - (-875) = 0$

$-131x - 195y - 69z = -875$ 4

d) Lagebeziehungen Ebenen im $\mathbb{R}^3$:

- parallel / kollokal
- identisch
- Schnitt(gerade)

3

e) Umwandeln in NF oder KF

parallel $\Leftrightarrow \vec{n}_1 = k \cdot \vec{n}_2$ und $P \notin E_2$ $(P \in E_1)$

$Q \notin E_1$ $(Q \in E_2)$

identisch $\Leftrightarrow \vec{n}_1 = k \cdot \vec{n}_2$ und Punktprobe ok

schnitt $\Leftrightarrow \vec{n}_1 \neq k \cdot \vec{n}_2$

4

f) $E_1: \; x - 2y + z = 2$

$E_2: \; x - 2y + z = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ echt parallel

4

g) $E_1: \; 3x + 2y + z = 4$

$E_2: \; 3x + 2y + z = 4$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ identisch

4

h) $\left.\begin{aligned} E_1: \; x + 2y - z &= 2 \\ E_2: \; 2x - y + 3z &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ Schnittgerade

4

(i) NF: $\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$; PF: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

4

$\Sigma\, 36$

③

a) A ist Stützvektor; $\vec{AB} = \begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix} = \vec{u}$ $\vec{AC} = \begin{pmatrix}1\\7\\0\end{pmatrix} = \vec{v}$ 6

b) E liegt parallel zur xy-Koordinatenebene um 1 LE nach oben verschoben. 2

c) $|\vec{AB}| = 5$ $|\vec{AC}| = \sqrt{50}$ $|\vec{BC}| = \sqrt{9+16+0^2} = 5$

$\Rightarrow$ gleichschenklig

$$\cos\alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{5 \cdot 5} = \frac{\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix}}{25} = 0 \rightsquigarrow \vec{AB} \perp \vec{BC}$$ 6

d) $V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = 125 \rightsquigarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot h = 125$

$\rightsquigarrow h = 30$

$\rightsquigarrow D(2/1/31)$ [von Punkt A aus 30 LE in z-Richtung] 6

e) $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}$

$E: z = 1$

Schnittpunkt:

$z = 5 + 4k$ (aus Gerade)

$z = 1$ (Ebene)

$\Rightarrow k = -1$

$\Rightarrow S(4/4/1)$

6

f) Punktprobe bei E

$4 = 2 + 4s + t \Rightarrow 2 = 4s + t$

$4 = 1 + 3s + 7t \Rightarrow 3 = 3s + 7t$

$1 = 1$

$s = \frac{11}{25}$ und $t = \frac{6}{25}$

$\Rightarrow$ S ist im Innern des Dreiecks, da die Parameterwerte beide im Intervall $[0; 1]$ liegen.

4

Und die Summe der beiden Parameterwerte kleiner/gleich 1 ist!!!

Σ 30

(4)

a) $t = 60 \rightsquigarrow \sqrt{3000^2 + 3000^2 + 300^2} = 4.253{,}23$ m 4

b) Richtungsvektor Flugbahn F1 und Richtungsvektor Landebahn sind linear abhängig (bzgl. x-y-Komponenten). 2

c) z: $1200 - 5t = 0 \rightsquigarrow t = 240$ [Sek.] $= 4$ [Min.]

t in Geradengleichung eingesetzt:

L (- 2000 / - 1000 / 0) 6

d) $s = \sqrt{21.000^2 + 21.000^2 + 2.100^2} = 29.772{,}64$ m 4

e) $g_{F_2}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -23.000 \\ -22.000 \\ 2.100 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 21.000 \\ 21.000 \\ -2.100 \end{pmatrix}$

Mit t = k/420

4

f) F_1 landet nach 4 Min. in L und F_2 nach 7 Min.

=> keine Kollision trotz linear abhängiger Richtungsvektoren

aber unterschiedlicher Stützvektoren 4

Σ 24

(5) Lagebeziehungen Geraden

a) Richtungsvektoren linear unabhängig => nicht parallel

Schnitt: $k = 0 \rightsquigarrow S(0/0/5)$

$\cos\alpha = 0 \rightsquigarrow g \perp h$ 5

b) Richtungsvektoren linear unabhängig & Stützvektor identisch

=> S (2/0/0)

=> $\cos\alpha = \dfrac{-2}{2 \cdot \sqrt{5}} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \rightsquigarrow \alpha = 116{,}56$ 5

c) Richtungsvektoren linear unabhängig & II) 4 = 0 ↯

=> windschief

5

d) Richtungsvektoren linear unabhängig

II.) $k = -1$ & III.) $3 = 0$

$\Rightarrow$ windschief 5

e) Richtungsvektoren linear abhängig

Punktprobe: III.) $4 = 1$ ↯

$\Rightarrow$ echt parallel 5

Σ 25

⑥ a) $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 22 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 32 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 13 \\ 14 \\ -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$E_2: -x + 2y + 5z = 80$ 3

Winkel mit xy-Koordinatenebene: $\vec{n}_{xy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}}{1 \cdot \sqrt{30}} = \dfrac{5}{\sqrt{30}} = \sqrt{\dfrac{5}{6}} \rightsquigarrow \alpha = 24{,}1$ 3

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $D(0/0/z)$ $C(32/16/z)$

↳ wegen S_1 ↳ wegen S_2

$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ z-22 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ z-22 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$

Winkel $\overrightarrow{AB}$ mit $\overrightarrow{AD} \rightsquigarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \rightsquigarrow$ orthogonal

$\Rightarrow$ Rechteck ABCD 6

c) $E_{\text{Tribüne}}: \; 2x - 4y + 5z = 65$

$\overline{AA'} = \begin{pmatrix}0\\0\\-21\end{pmatrix}$ $\quad \overline{BB'} = \begin{pmatrix}0\\0\\-21\end{pmatrix} \rightsquigarrow B'(38|4|1)$

$D'(0|0|z) \quad D(0|0|16) \rightsquigarrow z = 13$

$\overline{BM} = \begin{pmatrix}-19\\-2\\-3\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + 2\,\overrightarrow{BM}$

$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix}38\\4\\22\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-38\\-4\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\16\end{pmatrix}$

$D'(0|0|13) \rightsquigarrow C' = (32|16|13)$

$\frac{8}{\Sigma\, 20}$