Aufgabe 1: Analysis

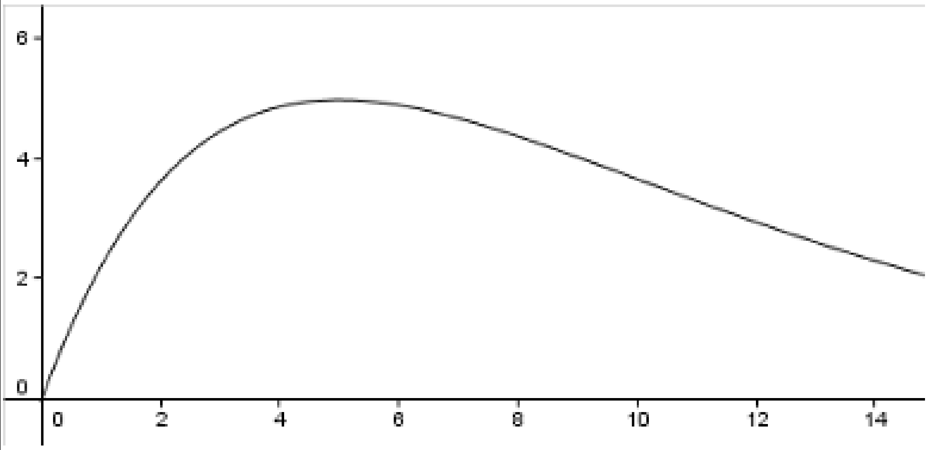
Bei einem Krankenhauspatienten wurde das hochansteckende BGY-Fieber diagnostiziert. Der Klinikleiter, Prof. Dr. Celsius, verordnet dagegen sofort eine LEARN-2012-Tablette. Durch wissenschaftliche Studien ist bekannt, dass die Konzentration des Wirkstoffs im Blut nach der Einnahme zum Zeitpunkt t = 0 näherungsweise durch die Funktion

$$f(t) = 2{,}7t \cdot e^{-0{,}2t}$$

beschrieben werden kann. t steht dabei für die Zeit in Stunden, f(t) ist die Konzentration von LEARN-2012 in mg je Liter Blut des Patienten. Das Medikament ist so lange wirksam, wie die Konzentration den Wert von 2 mg/l nicht unterschreitet.

1.1	Nach welcher Zeit ist die Konzentration von LEARN-2012 im Blut des Patienten am höchsten?	10	
1.2	Wie lange ist eine Tablette LEARN-2012 wirksam? Berechnen Sie den Zeitraum mit einem geeigneten Näherungsverfahren.	8	
1.3	Ermitteln Sie eine Stammfunktion zu f und bestimmen Sie damit: Wie hoch ist die durchschnittliche Konzentration von LEARN-2012 im Blut in den ersten 12 Stunden nach der Einnahme?	10	
1.4	Zu welchem Zeitpunkt wird das Medikament am schnellsten im Körper abgebaut?	6	
1.5	Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall [0; 12].	4	
1.6	Wie groß ist die momentane Änderungsrate der Konzentration von LEARN-2012 im Blut im Zeitpunkt t = 10?	3	
1.7	Der Abbau von LEARN-2012 im Blut kann ab dem Zeitpunkt t = 10 Näherungsweise durch die Tangente t an den Graphen von f beschrieben werden. Wann wird mit dieser Näherung der Wirkstoff unwirksam? Wann ist LEARN-2012 im Blut nicht mehr nachweisbar?	9	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
1.1	*Lokales Maximum* Ableitungen: Produktregel $f'(t) = (2{,}7 - 0{,}54t)\cdot e^{-0{,}2t}$ $f''(t) = (-1{,}08 + 0{,}108t)\cdot e^{-0{,}2t}$ $f'(t) = 0 \rightarrow t = 5$; $f''(t=5) < 0 \rightarrow$ Maximum Nach 5 Stunden ist die Konzentration am höchsten.	6	4	
1.2	*Newtonsches Näherungsverfahren* Gesucht sind die Lösungen von $f(t) = 2{,}7t\cdot e^{-0{,}2t} - 2 = 0$. Newton: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \rightarrow$ $x_1 = x_0 - \frac{2{,}7x_0\cdot e^{-0{,}2x_0} - 2}{(2{,}7 - 0{,}54x_0)\cdot e^{-0{,}2x_0}}$ Mit geeigneten Startwerten x_0 (z.B. 1 und 10) erhält man zwei Lösungen: 0,884 und 15,06. Die Differenz ist die Dauer der Wirksamkeit des Medikaments: 14¼ Std.		4	4
1.3	*Integrationsverfahren: Partielle Integration und Integration durch Substitution* $\int_0^{12} 2{,}7t\cdot e^{-0{,}2t}dt = \left[-5\cdot 2{,}7t\cdot e^{-0{,}2t}\right]_0^{12} - \int_0^{12} -13{,}5\cdot e^{-0{,}2t}dt$ $= \left[(-13{,}5t - 67{,}5)\cdot e^{-0{,}2t}\right]_0^{12} = -20{,}82 - (-67{,}5) = 46{,}68$. Die durchschnittliche Konzentration in den ersten 12 Stunden ist $\frac{46{,}68}{12} = 3{,}89\ \frac{mg}{l}$.		4	6
1.4	*Wendestelle* $f''(t) = 0 \rightarrow t = 10$ $f'''(t) = (0{,}324 - 0{,}0216t)\cdot e^{-0{,}2t}$, $f'''(t=10) \neq 0$ Nach 10 Stunden wird das Medikament am schnellsten abgebaut.	2	4	

1.5	*Zeichnung* 			
1.6	*Änderungsrate* f'(t=10) = - 0,365	3		
1.7	*Tangente* f(t=10) = 3,654 Setzt man Steigung und die Koordinaten des Wendepunktes in y = m·t + b ein, erhält man b = 7,3. Tangente h: y = - 0,365 t + 7,3 Der Wirkstoff wird unwirksam nach t = 14,52 Stunden (h(t) = 2) und ist nach 20 Stunden nicht mehr nachweisbar (h(t) = 0).		9	
	Summe	15	25	10

Aufgabe 2: Vektorielle Geometrie

Auf einem Modellfluggelände wird für eine kommende Flugshow trainiert und ein Team mathematikbegeisterter Schüler der Stufe BGY 15 wertet punktuell einige Sequenzen mit Hilfe von GPS-Signalen aus.

Alle folgenden Angaben sind in der Längeneinheit Meter.

Die Startbahn wird durch die drei Punkte **A(2/0/0), B(8/2/0) und C(6/8/0,2)** erfasst.

Ferner werden die Flugbahnen des **ersten M**odell**F**liegers **(MF1)** durch die Geradengleichung g_1 und die des **zweiten M**odell**F**liegers **(MF2)** durch die Geradengleichung g_2 wie folgt beschrieben:

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0{,}18 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad und \quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0{,}18 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad mit\ s,k \in \Re$$

Ein **dritter** sich gerade auf der Startbahn befindlicher **M**odell**F**lieger **(MF3)** wird durch die Punkte **P_1(21/1/1,04)** und **P_2(26/2/2,04)** erfasst und lässt sich durch eine Geradengleichung g_3 modellieren.

2.1 Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks ABC und dessen Fläche.

2.2 Geben Sie eine Ebenengleichung in Parameter- und Koordinatenform an, in der die Punkte A, B und C liegen.

=> Kontrollergebnis: $E: \quad x - 3y + 100z \quad = \quad 2$

2.3 Ermitteln Sie den Neigungswinkel der Startbahn zum Boden (xy-Koordinatenebene).

2.4 Unter welchem Winkel hebt der Modellflieger MF1 ab?

2.5 Welchen Abstand haben die Flugbahnen der Modellflieger MF1 , MF2 und MF3 jeweils paarweise zueinander?

2.6 In welchem Punkt befindet sich der Modellflieger MF3 beim Start?

Die Unterseite einer Wolkenformation verläuft annähernd längs der Ebene E_{Wolke} mit

$$E_{Wolke} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -29 \\ 0{,}18 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad mit\ u,v \in \Re$$

, wobei für die Parameter wegen der räumlichen Ausdehnung der Wolkenfront gilt: $u \in [2;6] \quad und \quad v \in [0;4]$

2.7 Beurteilen Sie die geometrische Form der Wolkenfront und ermitteln Sie deren Fläche.

2.8 Prüfen Sie, ob die Unterseite der Wolkenfront von MF2 durchflogen wird.

Das Highlight ist der Versuch eines Bonbonabwurfs in das Dreieck ABC.
Der beste Wurf trifft im Punkt $\mathbf{P_3}$ $\mathbf{(7/5/x_3)}$.

2.9 Ermitteln Sie rechnerisch, ob sich der Punkt innerhalb oder außerhalb des Dreiecks befindet.

Lösungen

(1) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow |\vec{AB}| = \sqrt{40}$ $\quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow |\vec{AC}| = \sqrt{80{,}25}$

$\vec{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow |\vec{BC}| = \sqrt{40{,}25}$

$U = 21{,}62\ [m]$

$A = \frac{1}{2} \, |\vec{AB} \times \vec{AC}|$ $\quad \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ -1{,}2 \\ 40 \end{pmatrix}$

$A = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ -1{,}2 \\ 40 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot 40{,}02 = 20{,}01$

(2) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ -1{,}2 \\ 40 \end{pmatrix} \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \rightsquigarrow E: 0{,}4x - 1{,}2y + 40z = 0{,}8$

Kontrollergebnis: $[\cdot 2{,}5]$

(3) $\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix} 0{,}4 \\ -1{,}2 \\ 40 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{40{,}02 \cdot 1} = 0{,}9995 \rightsquigarrow \alpha = 1{,}812$

(4) $\sin\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix} 0{,}4 \\ -1{,}2 \\ 40 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}}{40{,}02 \cdot \sqrt{56}} = \dfrac{152}{299{,}48} \approx 0{,}5075 \rightsquigarrow \alpha = 30{,}5$

(5) Abstände

MF 1 $\leftrightarrow$ MF 2 $\rightsquigarrow$ parallel $\quad e = \dfrac{|\vec{u} \times (\vec{a} - \vec{b})|}{|\vec{u}|}$

$e = \dfrac{\left| \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{56}} = \dfrac{\begin{pmatrix} -16 \\ 20 \\ -38 \end{pmatrix}}{\sqrt{56}} = \dfrac{\sqrt{2100}}{\sqrt{56}} \approx 6{,}123$

MF 1 ⟷ MF 3 windschief

$$e = \frac{|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

$$e = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 22 \\ -32 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ 7 \\ -0{,}86 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1512}}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 22 \\ -32 \end{pmatrix}$$

$$e = \frac{155{,}52}{\sqrt{1512}} = 4$$

MF 2 ⟷ MF 3 windschief

$e = 1{,}48$

⑥

$$g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 21 \\ 1 \\ 1{,}04 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 21 + 5r \\ y &= 1 + r \\ z &= 1{,}04 + r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E: \quad 0{,}4(21 + 5r) - 1{,}2(1 + r) + 40(1{,}04 + r) &= 0{,}8 \\ 8{,}4 + 2r - 1{,}2r - 1{,}2 + 41{,}6 + 40r &= 0{,}8 \\ 48{,}8 + 40{,}8r &= 0{,}8 \\ 40{,}8r &= -48 \\ r &= -\frac{20}{17} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= 21 - \frac{100}{17} = 15\frac{2}{17} \\ y &= 1 - \frac{20}{17} = -\frac{3}{17} \\ z &= 1{,}04 - \frac{20}{17} = -\frac{58}{425} \end{aligned} \right\} \text{Punktkoordinaten}$$

Analog zu Kontrollergebnis:

$$\begin{aligned} 122 + 102r &= 2 \\ 102r &= -120 \\ r &= -\frac{120}{102} \end{aligned}$$

⑦
- Richtungsvektoren verlaufen orthogonal zueinander $\Rightarrow 90°$
- Richtungsvektoren haben unterschiedliche Länge aber der Def.-Bereich der beiden Parameter ist jeweils 4 Einheiten

$\Rightarrow$ gleiche Richtungsstreckung

$$\Downarrow$$

Rechteck

oder Argumentation über Punkte berechnen $\begin{pmatrix}4\\0\\-12\end{pmatrix} \Rightarrow \sqrt{160}$

$(u,v) = (2,0)$: $\begin{pmatrix}8\\-29\\-5{,}82\end{pmatrix}$ $\quad$ $(u,v) = (6,0)$: $\begin{pmatrix}12\\-29\\-17{,}82\end{pmatrix}$

$(u,v) = (2,4)$: $\begin{pmatrix}8\\-25\\-5{,}82\end{pmatrix}$ $\quad$ $(u,v) = (6,4)$: $\begin{pmatrix}12\\-25\\-17{,}82\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} \sim 4$ $\quad$ $\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} \sim 4$

$\begin{pmatrix}4\\0\\-12\end{pmatrix} \sim \sqrt{160}$

Rechteck: $A = 4 \cdot \sqrt{160} = 16 \cdot \sqrt{10} \approx 50{,}6$

$$A = \left| \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\0\\-12\end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix}-48\\0\\-16\end{pmatrix} \right| \approx 50{,}6$$

⑧ Schnitt MF2 <-> E_{Wolke}

$$\begin{pmatrix}3\\4\\0{,}18\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-29\\0{,}18\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{lrcl} \text{I} & 3 & = & k - u \\ \text{II} & -25 & = & -3k - v \\ \text{III} & 0 & = & -2k + 3u \end{array}\right\} \quad k = 9 \quad u = 6 \quad v = -2$$

$\Rightarrow$ aufgrund der Parameterwerte u und v gilt:
MF 2 durchfliegt zwar die Ebene aber nicht die Wolkenwand

(9) Dreieck - Ebene

$x - 3y + 100z = 2$ (Kontrollergebnis)

$P_3(7/5/x_3)$ ⇝ einsetzen

$$7 - 3\cdot 5 + 100x_3 = 2$$
$$100x_3 = 10$$
$$x_3 = 0{,}1$$

$\Rightarrow P_3(7/5/0{,}1)$

Prüfen, ob $\in$ im Δ liegt: Punktprobe ⇝ Parameterwertberechnung bei Koordinatenform

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$$

$7 = 2 + 6k + 4r$ Probe: $7 = 2 + 3 + 2$ $\not\equiv$

$5 = 2k + 8r \Rightarrow k = 0{,}5$

$0{,}1 = 0{,}2r \Rightarrow r = 0{,}5$

$\Rightarrow$ Der Punkt P_3 liegt genau auf dem Rand des Δ.

Aufgabe 3: Stochastik

Quelle: de.wikipedia.org/wiki/Martin_Luther

500 Jahre Reformation

Am 31. Oktober 1517 veröffentlichte Martin Luther seine 95 Thesen in Wittenberg.
Er wollte damit eine Diskussion über eine Reformation der Kirche anstoßen, was letztendlich zur Spaltung der Kirche in Katholiken und Protestanten führte.

3.1 Wittenberg liegt in Sachsen-Anhalt. Im Ursprungsland der Reformation sind heute 79 % der Bevölkerung konfessionslos, 13,9 % evangelisch und 3,5 % katholisch. Die restlichen 3,6 % gehören anderen Religionen an.

3.1.1 Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind von 100 zufällig ausgewählten Bürgern aus Sachsen-Anhalt genau 15 evangelisch? [2]

3.1.2 Wie wahrscheinlich ist es, in Wittenberg (50.400 Einwohner) zwischen 1.700 und 1.800 (jeweils einschließlich) Katholiken zu finden? [9]

3.1.3 Begründen Sie, wieso die Aufgabe 4.2 mit einer Tabelle der Normalverteilung gelöst werden kann. [2]

3.1.4 Wie viele Personen aus Sachsen-Anhalt muss man befragen, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 98 % mindestens einen Katholiken darunter findet? [5]

1975 entstand in Wittenberg das Martin-Luther-Gymnasium, zunächst als einfacher DDR-Plattenbau. Dieser wurde ab 1997 nach Plänen von Friedensreich Hundertwasser saniert. Seitdem ist die Schule auch als „Hundertwasserschule“ bekannt.

Quelle: structurae.de/bauwerke/martin-luther-gymnasium

Quelle: de.wikipedia.org/wiki/Lutherstadt_Wittenberg

Zum 500jährigen Jubiläum der Reformation und 20jährigen Jubiläum als „Hundert-wasserschule“ plant die Schule mehrere Projekte. Zur Mitfinanzierung werden Bilder der Schule im Postkartenformat zu je 0,50 € (Verkaufsanteil in Stückzahlen: 60 %), im DIN-A-4-Format zu je 1,50 € (Anteil: 28 %) und als Poster zu je 4,00 € verkauft.

3.2 Ermitteln Sie den Durchschnittsverkaufspreis je verkauftem Bild und die Varianz. [6]

Zusätzlich werden Buttons (Anstecker) mit einem Luther-Porträt verkauft. Diese bezieht die Schule von den Herstellern „ML“ und „Refo 500“. Bei den Buttons beider Lieferanten ist ein Teil der Befestigungsnadeln nicht richtig verklebt, so dass sich die Nadel sehr leicht vom Anstecker löst. Dies betrifft 0,5 % der Buttons von „ML“ und 0,8 % der Buttons von „Refo 500“.

3.3.1 Bei 0,62 % aller bisher gelieferten Buttons lösten sich Button und Anstecknadel. Ermitteln Sie die Lieferanteile der beiden Hersteller. [5]

3.3.2 Ab sofort bezieht das Martin-Luther-Gymnasium 72 % der Anstecker von „ML“ und den Rest von „Refo 500“. Aus den aktuellen Lieferungen hat sich bei einem Button die Anstecknadel gelöst. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt sie aus einer Lieferung von „Refo 500“? [4]

3.4 Das Schulorchester und der Chor haben zehn Lieder von Martin Luther (z.B. „Vom Himmel hoch“, „Ein feste Burg“) einstudiert.
Die Feierstunde „20 Jahre Hundert-wasser-Gymnasium“ soll mit drei Liedern eröffnet werden.

3.4.1 Wie viele Möglichkeiten hat die Schulleitung, aus den zehn geprobten Liedern drei auszuwählen? [2]

3.4.2 Wie ändert sich die Zahl der Möglichkeiten, wenn zugleich die Reihenfolge der Lieder festgelegt wird? [2]

3.5 Der Kurs „Darstellendes Spiel" probt mehrere Szenen aus Luthers Leben, z.B. „Luther vor dem Reichstag in Worms". In diesem Kurs sind 15 Mädchen und 8 Jungen.

3.5.1 Wie viele Möglichkeiten gibt es, sechs Personen aus diesem Kurs auszuwählen, von denen drei weiblich und drei männlich sind? [3]

3.5.2 Wie viele verschiedene Gruppen aus insgesamt sechs Darstellerinnen und Darstellern lassen sich bilden, die nicht nur aus Mädchen bestehen? [4]

Martin Luther war einer der Wegbereiter einer einheitlichen deutschen Sprache. In seiner Bibelübersetzung hat er zahlreiche Wörter und Redensarten erschaffen, z.B. „Lästermaul", „Geizhals", „die Zähne zusammenbeißen".

3.6 Die Deutsch-Kurse haben ein Quiz mit 40 Aufgaben erarbeitet, bei dem man aus jeweils vier Wörtern oder Redensarten das- oder diejenige herausfinden muss, welche/s auf Martin Luther zurückgeht. Beispiel:

A: *des Pudels Kern*
B: *jemanden einen Bären aufbinden*
C: *Das geht auf keine Kuhhaut.*
D: *aus einer Mücke einen Elefanten machen*
(Antwort C ist richtig.)

3.6.1 Mit welcher Wahrscheinlichkeit entscheidet sich eine ahnungslose Person unter den 40 Quizfragen mit je vier Antwortmöglichkeiten für genau 10 richtige und 30 falsche Antworten? [2]

3.6.2 Mit welcher Wahrscheinlichkeit errät jemand zufällig mindestens 8 richtige Antworten? [4]

Aufgabe 4

Lösungsskizze		Anforderungsbereiche I	II	III
3.1	Formel von Bernoulli, Normalverteilung			
3.1.1	Bernoulli, Punktwahrscheinlichkeit	2		

	B(100; 0,139;15) = 0,1057 Mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 11 % sind genau 15 von 100 zufällig ausgewählten Bürgern evangelisch.			
3.1.2	Normalverteilung, diskrete Zufallsvariable $\sum_{k=1.700}^{1.800} B(50.400; 0{,}035; k)$ $= \sum_{0}^{1.800} B(50.400; 0{,}035; k)$ $- \sum_{k=0}^{1.699} B(50.400; 0{,}035; k)$ $\mu = E(X) = n \cdot p = 50.400 \cdot 0{,}035 = 1.764$ $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{50.400 \cdot 0{,}035 \cdot 0{,}965} = \sqrt{1702{,}26}$ $z_1 = \frac{1.699 - 1.764 + 0{,}5}{\sqrt{1702{,}26}} = -1{,}5633$ $z_2 = \frac{1.800 - 1.764 + 0{,}5}{\sqrt{1702{,}26}} = 0{,}8847$ $\phi\ (1{,}56) = 0{,}9406, \quad \phi\ (1{,}57) = 0{,}9418$ Durch Interpolieren erhält man Φ (1,5633) = 0,9412; ϕ (-1,5633) = 1 – 0,9412 = 0,0588 ϕ (0,88) = 0,8106, ϕ (0,89) = 0,8133; ϕ (0,8847) = 0,8119 ϕ (0,8847) – ϕ (- 1,5633) = 0,7531 Mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 75 % leben in Wittenberg zwischen 1.700 und 1.800 Katholiken.		5	4
3.1.3	Laplace-Bedingung Die Normalverteilung ist als Näherung für eine Binomial-verteilung geeignet, wenn die Laplace-Bedingung V(X) > 9 oder gleichwertig σ (X) > 3 erfüllt ist; dies ist mit σ (X) = 41,258… der Fall.		2	
3.1.4	Binomialverteilung, n gesucht P (mind. 1 Katholik unter n Personen) ≥ 0,98 ist gleich-wertig mit P (kein Katholik unter n Personen) ≤ 0,02 $0{,}965^n \leq 0{,}02$ $n \cdot \lg 0{,}965 \leq \lg 0{,}02$ $n \geq \frac{\lg 0{,}02}{\lg 0{,}965} = 109{,}8$ Man muss mindestens 110 Personen befragen …		2	3

3.2	Mittelwert und Streuungsmaß	3	3	

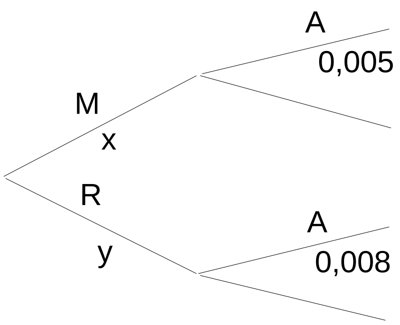
$\mu = E(X) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 + 1{,}5 \cdot 0{,}28 + 4 \cdot 0{,}12 = 1{,}2$

xi	xi-E(X)	(xi-E(X))²	P(X=xi)	(xi-E(X))²·P(X=xi)
0,5	-0,7	0,49	0,60	0,2940
1,5	0,3	0,09	0,28	0,0252
4,0	2,8	7,84	0,12	0,9408
			V(X) =	**1,2600**

Die Varianz ist 1,26.

3.3.1	Baumdiagramm, unbekannte Wahrscheinlichkeiten der ersten Verzweigung		2	3

M sei „Lieferant ML", R sei „Lieferant Refo 500",
A sei „Anstecknadel löst sich".



Es ergibt sich folgendes LGS:
(1) $0{,}005x + 0{,}008y = 0{,}0062$
(2) $x + y = 1$
Mit den Lösungen $x = 0{,}6$ und $y = 0{,}4$.
ML lieferte 60 %, Refo 500 40 % der Buttons.

3.3.2	Bedingte Wahrscheinlichkeit		2	2

$$P_A(R) = \frac{P\,(A\ \cap R)}{P\,(A)} = \frac{0{,}28 \cdot 0{,}008}{0{,}72 \cdot 0{,}005 + 0{,}28 \cdot 0{,}008} = \frac{28}{73} = 0{,}3836$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 38 % stammt die Lieferung von Refo 500.

3.4.1	Kombinatorik, ungeordnete Teilmenge	1	1	

	$N = \binom{10}{3} = 120$ Es gibt 120 Möglichkeiten, 3 aus den 10 Liedern auszuwählen.			
3.4.2	Kombinatorik, geordnete Teilmenge ohne Zurücklegen $N = \frac{10!}{(10-3)!} = 720$ Wenn zugleich eine Reihenfolge der 3 ausgewählten Liefer festgelegt wird, dann gibt es 720 Möglichkeiten.	1	1	
3.5.1	Kombinatorik, ungeordnete Teilmengen, kombiniert mit Multiplikationssatz $N = \binom{15}{3} \cdot \binom{8}{3} = 455 \cdot 56 = 25.480$ Es gibt 25.480 Möglichkeiten, …		3	
3.5.2	Komplexe Aufgabe zur Kombinatorik Einfachste Variante: Alle Sechsergruppen aus 23 Schülern ohne die Sechsergruppen aus nur 6 Mädchen: $N = \binom{23}{6} - \binom{15}{6} = 100.947 - 5.005 = 95.942$ Es lassen sich 95.942 verschiedene Sechsergruppen zusammenstellen, die nicht nur aus Mädchen bestehen.		1	3
3.6.1	Formel von Bernoulli, Punktwahrscheinlichkeit B(40; 0,25; 10) = 0,1444 Mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 14 % errät ein Ahnungsloser genau 10 von 40 richtigen Antworten.	2		
3.6.2	Binomialverteilung, aufsummiert, Gegenwahrscheinlichkeit $\sum_{k=8}^{40} B\,(40; 0{,}25; k) = 1 - \sum_{k=0}^{7} B\,(40; 0{,}25; k) = 1 - 0{,}1820 = 0{,}8180$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 82 % errät jemand ohne Vorkenntnisse mindestens 8 von 40 Antworten.	1	3	
	Summe	10	25	15

Zu 3.5.2 $\sum_{x=0}^{5}\binom{15}{x}\cdot\binom{8}{6-x}$