Musterlösung **2. Jgst.** **4. Klassenarbeit** **Datum: 23.04.2008**

Klasse: BF II **Fach: Mathematik**

Themen: **Potenzen und Potenzgesetze; Wurzel; lineare und quadratische Fkt.**

Thema 1: Quadratische Funktionen und Gleichungen

1.) Quadratischen Gleichungen

Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

a) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 6 = 0$ b) $-6x^2 - 36x + 42 = 0$

c) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$ d) $4x^{10} - 12x^5 + 8 = 0$

Lösung:

$$\xrightarrow[\cdot 2]{-12} \quad x^2 + x = 12 \xrightarrow{quadr.\,Ergänzung} x^2 + x + 0,5^2 = 12 + 0,5^2$$

$$\Rightarrow \left(x + 0,5\right)^2 = 12,25 \xrightarrow{\sqrt{\ }} x + 0,5 = \pm 3,5$$

$$\Rightarrow x_1 = 3 \wedge x_2 = -4$$

Lösung:

$$\xrightarrow[:(-6)]{-42} \quad x^2 + 6x = 7 \xrightarrow{quadr.\,Ergänzung} x^2 + 6x + 3^2 = 7 + 3^2$$

$$\Rightarrow \left(x + 3\right)^2 = 16 \xrightarrow{\sqrt{\ }} x + 3 = \pm 4$$

$$\Rightarrow x_1 = 1 \wedge x_2 = -7$$

Lösung:

$$Sub.: \; x^2 = u \Rightarrow u^2 - 9u + 20 = 0$$

$$\Rightarrow u_1 = 5 \wedge u_2 = 4$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{5} \wedge x_{3/4} = \pm 2$$

Lösung:

$$4x^{10} - 12x^5 + 8 = 0$$

$$Sub.: \; x^5 = u \Rightarrow 4u^2 - 12u + 8 = 0$$

$$\Rightarrow u_1 = 1 \wedge u_2 = 2$$

$$\Rightarrow x_1 = 1 \wedge x_2 = \sqrt[5]{2}$$

2.) Textaufgaben zu quadratischen Gleichungen

a) Subtrahiert man vom Quadrat einer Zahl 25, so erhält man 75.
Wie heißt die Zahl?

Lösung:

$$x^2 - 25 = 75 \xrightarrow{+75} x^2 = 100$$
$$\Rightarrow x_1 = 10 \wedge x_2 = -10$$

b) Das Produkt zweier Zahlen ist 125. Die Differenz der beiden Zahlen beträgt 20.
Wie heißen die beiden Zahlen?

Lösung:

$$I.) \quad x \cdot y = 125 \qquad II.) \quad x - y = 20 \Rightarrow x = 20 + y$$
$$\Rightarrow (20+y)\cdot y = 125 \Rightarrow y^2 + 20y = 125$$
$$\Rightarrow y_1 = 5 \wedge y_2 = -25$$
$$\Rightarrow x_1 = 25 \wedge x_2 = -5$$

Antwort: Die beiden Zahlen lauten ± 5 und ± 25!

c) Die Seiten eines Rechtecks unterscheiden sich um 3 cm. Wenn man beide Seiten um 2 cm verlängert, wird der Flächeninhalt um 38 cm² größer.

Wie lang sind die Seiten des ursprünglichen Rechtecks?

Lösung:

$$I.) \quad y = x + 3 \qquad II.) \quad (x+2)\cdot(y+2) = xy + 38$$
$$\Rightarrow xy + 2x + 2y + 4 = xy + 38 \Rightarrow 2x + 2(x+3) = 34$$
$$\Rightarrow 4x + 6 = 34 \Rightarrow 4x = 28$$
$$\Rightarrow x = 7 \wedge y = 10$$

Antwort: Die beiden Seiten waren ursprünglich 7 cm und 10 cm lang.

3.) Lösungsverhalten quadratischer Gleichungen

Für welche reelle Zahl k hat die Gleichung $x^2 + 12x + 3k = 0$ nur eine Lösung?

Lösung:

$$x^2 + 12x + 3k = 0 \xrightarrow{quadr.\,Ergänzung} x^2 + 12x + 6^2 = -3k + 6^2$$
$$\Rightarrow -3k + 36 = 0 \Rightarrow k = 12$$

4.) Funktionsgleichung einer Parabel

Eine Parabel verläuft durch die Punkte

$$P(2 \mid 3), \quad Q(-4 \mid 21) \quad und \quad R(0 \mid 5).$$

Ermitteln Sie die Parabelgleichung.

Lösung:

$$Ansatz:$$

$$\left.\begin{array}{ll} I.) & 4a+2b+c=3 \\ II.) & 16a-4b+c=21 \\ III.) & c \qquad =5 \end{array}\right\} \begin{array}{ll} I.) & 4a+2b+5=3 \\ II.) & 16a-4b+5=21 \\ III.) & c \qquad =5 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l} a\\a\\a \end{array}}\right\} \begin{array}{ll} I.) & 4a+2b=-2 \\ II.) & 16a-4b=16 \\ III.) & c \qquad =5 \end{array}$$

$$\xrightarrow{II.)-4\cdot I.)} \quad -12b \quad = 24 \quad \Rightarrow \quad b=-2 \quad \Rightarrow \quad a=0{,}5$$

$$\Rightarrow \quad f(x)=0{,}5x^2-2x+5$$

5.) Scheitel einer Parabel

Geben Sie den Scheitelpunkt der Parabeln an:

a) $f_1(x)=(x-4)^2+3$

$$\boxed{S(\quad 4 \quad \mid \quad 3 \quad)}$$

b) $f_2(x)=(x+2)^2-5$

$$\boxed{S(-2 \mid -5)}$$

6.) Lage einer Parabel

Ergänzen Sie die Tabelle:

Scheitelpunkt	Funktionsgleichung	Erklärung der Verschiebung
$S(5 \mid -1)$	$f_1(x) = (x-5)^2 - 1$	**Die Normalparabel wird um 5 Einheiten nach rechts und eine Einheit nach unten verschoben.**
$S(-3 \mid -2)$	$f_1(x) = (x+3)^2 - 2$	Die Normalparabel wird um 3 Einheiten nach links und 2 Einheiten nach unten verschoben.
$S(2 \mid 1)$	$f(x) = (x-2)^2 + 1$	**Die Normalparabel wird um 2 Einheiten nach rechts und eine Einheit nach oben verschoben.**

Thema 2: Lineare Funktionen

1.) Das Taxiproblem

Herr Schwab ist 24 km mit dem Taxi gefahren. Dafür zahlte er 14,50 €.

a) Wie viel kostet der Kilometer, wenn man weiß, dass die Grundgebühr 2,50 € beträgt?

Lösung: 14,50 – 2,50 = 12,00 => 12,00/24 = 0,50 €/km

b) Wie weit könnte er mit 30,00 € fahren?

Lösung: 30,00 – 2,50 = 27,50 => 27,50 €/0,50 €/km = 55 km

Die Fahrtkosten der Taxiunternehmung Raffgeier gestalten sich nach folgender Gleichung: $f(x) = 0{,}3x + 8$

c) Wie hoch sind hier Kilometerpreis und die Grundgebühr?

Lösung: Kilometerpreis: 0,30 € Grundgebühr: 8,00 €

d) Wie viel kostet eine Fahrt über 24 km?

Lösung: $f(24) = 0{,}3 \cdot 24 + 8 = 15{,}20\,[€]$

2.) Zeichnen von Funktionen

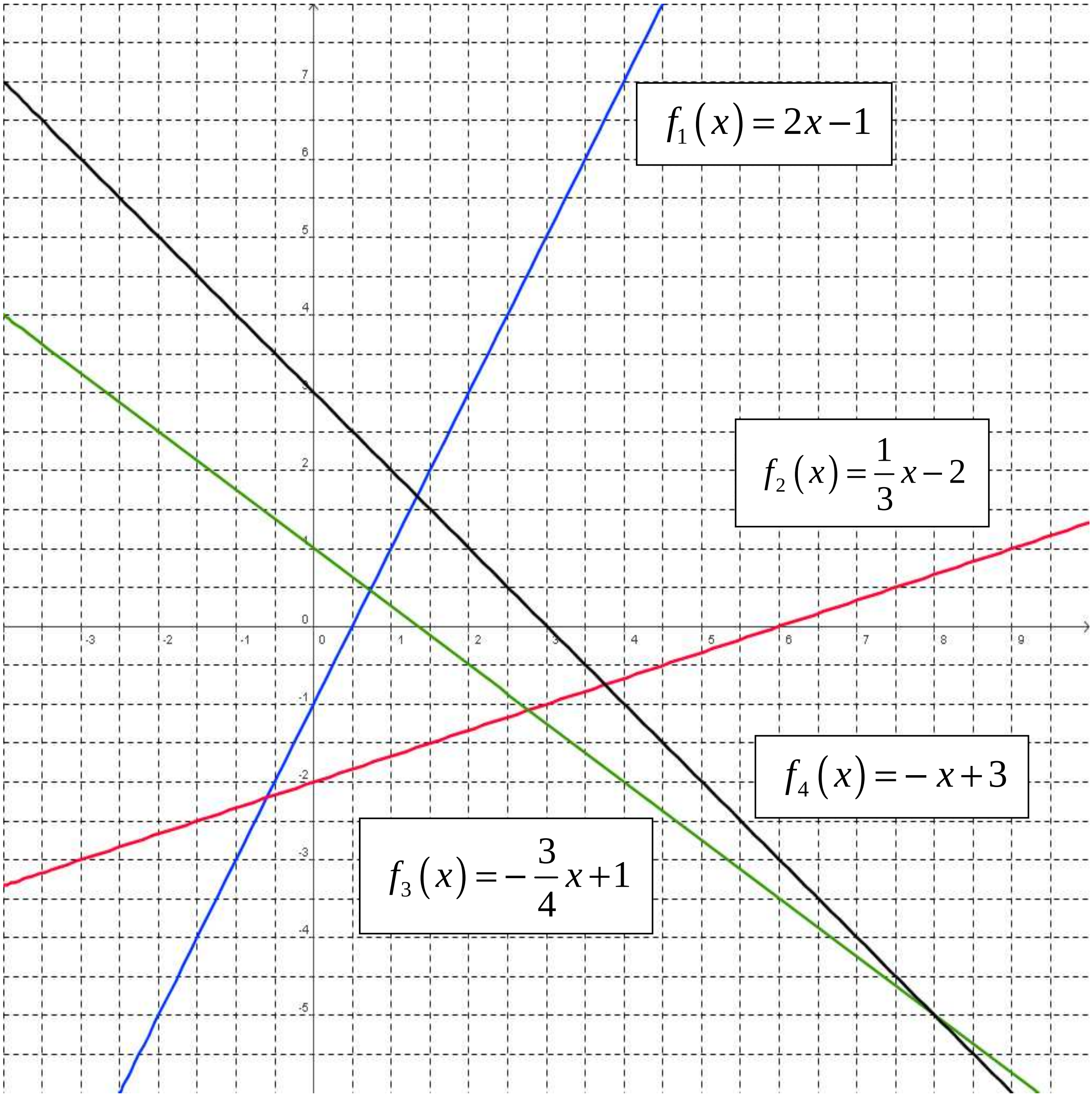
Zeichnen Sie die linearen Funktionen in das folgende Koordinatensystem:

a) $f_1(x) = 2x - 1$

b) $f_2(x) = \frac{1}{3}x - 2$

c) $f_3(x) = -\frac{3}{4}x + 1$

d) $f_4(x) = -x + 3$



3.) Lineare Gleichungssysteme

Lösen Sie die LGS.

a) $\begin{aligned} I.)\quad & \frac{1}{2}x+\frac{2}{5}=3y \\ II.)\quad & 4x-2=y \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} I.)\quad & x+2y=5 \\ II.)\quad & 2x+4y=-2 \end{aligned}$

Lösung:

$$\left.\begin{aligned} I.)\quad & \frac{1}{2}x+\frac{2}{5}=3y \\ II.)\quad & 4x-2=y \end{aligned}\right\} \xrightarrow{I.)-3\cdot II.)} -11{,}5x=-6{,}4 \xrightarrow{:(-11{,}5)} x\approx 0{,}56$$

$$\Rightarrow\quad 4x-2=y \xrightarrow{x\approx 0{,}56} 4\cdot 0{,}56-2=y \quad\Rightarrow\quad y\approx 0{,}226\approx 0{,}23$$

Lösung:

$$\left.\begin{aligned} I.)\quad & x+2y=5 \\ II.)\quad & 2x+4y=-2 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{2\cdot I.)-II.)} 0=12 \quad\Rightarrow\quad \textit{keine Lösung}$$

Thema 3: Rechentechnik und Potenzgesetze

1.) Multiplizieren Sie aus:

a) $(3a+5)(2b-3)$ b) $(4ab-8c)(a-3bc)$

Lösung:

$$(3a+5)(2b-3) = 6ab-9a+10b-15$$

$$(4ab-8c)(a-3bc) = 4a^2b-12ab^2c-8ac+24bc^2$$

2.) Berechnen Sie und schreiben Sie als Potenzausdruck

a) $10^2 \cdot 10^3$ b) $\left(10^2\right)^4$ c) $10^7 : 10^2$

d) $a^7 : a^5$ e) $\left(a^3\right)^8$ f) $a^3 \cdot a^2 \cdot a^4$

Lösung:

$10^2 \cdot 10^3 = 10^{2+3} = 10^5$ $\left(10^2\right)^4 = 10^{2\cdot4} = 10^8$

$10^7 : 10^2 = 10^{7-2} = 10^5$ $a^7 : a^5 = a^{7-5} = a^2$

$\left(a^3\right)^8 = a^{3\cdot8} = a^{24}$ $a^3 \cdot a^2 \cdot a^4 = a^{3+2+4} = a^9$

3.) Vereinfachen Sie die Bruchterme

a) $\dfrac{x^3 \cdot a^2 \cdot b^5}{a \cdot x^2 \cdot b^7}$ b) $\dfrac{120 \cdot a^3 \cdot b^6 \cdot c^3}{48 \cdot a^4 \cdot b \cdot c^2}$

Lösung:

$$\frac{x^3 \cdot a^2 \cdot b^5}{a \cdot x^2 \cdot b^7} = \frac{x^{3-2} \cdot a^{2-1}}{b^{7-5}} = \frac{x \cdot a}{b^2}$$

$$\frac{120 \cdot a^3 \cdot b^6 \cdot c^3}{48 \cdot a^4 \cdot b \cdot c^2} = \frac{12 \cdot 5 \cdot 2 \cdot b^{6-1} \cdot c^{3-2}}{12 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a^{4-3}} = \frac{5 \cdot b^5 \cdot c}{2 \cdot a}$$

4.) Ordnen Sie die Lösungen zu

$$x\sqrt{x} = \qquad\qquad x^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{x^3}{\sqrt{x}} = \qquad\qquad x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^3}} = \qquad\qquad x$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x}}\right)^2 = \qquad\qquad x^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{x}}{x^2} = \qquad\qquad x^{-1}$$

$$\sqrt{\frac{1}{x^2}} = \qquad\qquad x^{\frac{5}{2}}$$

__Lösung:__

$$x\sqrt{x} = \longrightarrow x^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{x^3}{\sqrt{x}} = \longrightarrow x^{\frac{5}{2}}$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^3}} = \longrightarrow x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x}}\right)^2 = \longrightarrow x$$

$$\frac{\sqrt{x}}{x^2} = \longrightarrow x^{-\frac{3}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{x^2}} = \longrightarrow x^{-1}$$