Musterlösung **13. Jgst.** **1. Kursarbeit** **Datum: 15.10.2004**

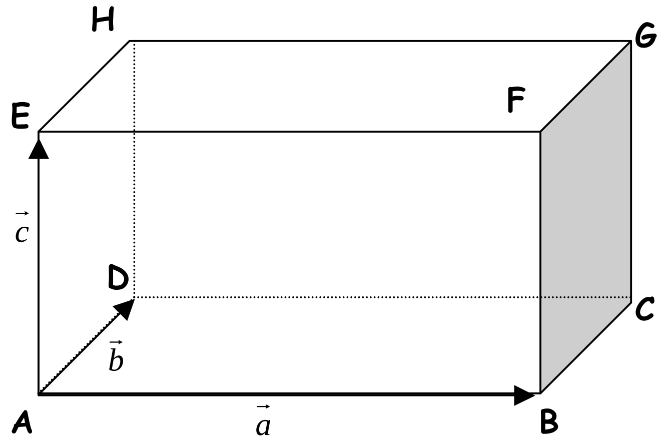
Klasse: GY 02 c **Fach: Mathematik (Grundkurs)**

Thema 1: Vektoren und vektorielle Geradengleichungen

BITTE GEBEN SIE ANSÄTZE UND RECHENWEGE AN!

---

❶ Gegeben sei der Quader durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ *und* $\vec{c}$.
Drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{EG}$ *und* $\overrightarrow{GA}$. durch die gegebenen Vektoren aus.



Lösung:

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a}+\vec{b} \qquad \overrightarrow{BH} = -\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

$$\overrightarrow{DF} = \vec{a}-\vec{b}+\vec{c} \qquad \overrightarrow{EG} = \vec{a}+\vec{b} \qquad \overrightarrow{GA} = -\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$$

❷ a) Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}$

Für welche Werte von b_1 besteht lineare Unabhängigkeit?

Lösung:

$$\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}b_1\\\frac{1}{4}\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda=-8$$

$$\Rightarrow \lambda\cdot b_1=4 \Rightarrow b_1=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \textit{linear abhängig}$$

$$\Rightarrow b_1\in\Re\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

b) Die Vektoren $\vec{p}=\begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}1\\-x\\-2\end{pmatrix}$ und $\vec{m}=\begin{pmatrix}x\\2\\1\end{pmatrix}$ sollen linear abhängig werden. Wie lauten die Komponentenwerte x?

Lösung:

$$\begin{vmatrix}4 & 1 & x\\ 4 & -x & 2\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix} \overset{Sarrus}{=} -4x+6-8x+3x^2+16-4 \overset{!}{=} 0$$

$$3x^2-12x+18 = 0 \Rightarrow \textit{nicht lösbar}$$

$$\Rightarrow \text{ es existiert kein x für das gilt: } \vec{p}, \vec{q} \textit{ und } \vec{m} \text{ linear abhängig}$$

❸ Gegeben sind die Punkte A(5/7/-1) und B(4/3/-2)

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Gerade durch diese Punkte.

Lösung:

$$\textit{Geradengleichung}:$$

$$g:\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\7\\-1\end{pmatrix}+\lambda\left[\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\7\\-1\end{pmatrix}\right]$$

$$g:\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\7\\-1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\-4\\-1\end{pmatrix}$$

b) Gibt es einen Wert für h, damit der Punkt C(h/-h/2) auf der Geraden liegt?

Lösung:

$$\textit{Geradengleichung}:$$

$$\begin{pmatrix}h\\-h\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\7\\-1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\-4\\-1\end{pmatrix}$$

$III)\quad 2=-1-\lambda \quad\Rightarrow\quad \lambda=-3$

$I)\quad h=5-\lambda \quad\Rightarrow\quad h=8$

$II)\quad -h=7-4\lambda \quad\Rightarrow\quad h=19$

Es gibt kein h, da die h-Werte nicht einheitlich sind.

❹ Gegeben sei die Gerade g mit $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}$.

a) Geben Sie zwei Punkte an, die auf der Geraden liegen.

Lösung:

$$\mathit{Punkt}\ 1: \mathit{Ortsvektor}\ \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$$

$$\mathit{Punkt}\ 2: \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\-1\end{pmatrix}\quad \mathit{mit}\ t=1$$

b) Geben Sie je eine Gerade an, die echt parallel, windschief und mit einem Schnittpunkt zu g verläuft.
(Anmerkung: mit Begründung!)

Lösung:

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}$$

parallel: Richtungsvektor identisch, Ortsvektor von h $\notin$ g

$$h:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}$$

windschief: kein Schnittpunkt; Bedingung: $\mathrm{Det}\left[\left(\vec{\mathrm{a}}-\vec{b}\right),\vec{u},\vec{v}\right]\neq 0$

$$h:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Schnittpunkt: verschiedene Richtungsvektoren, identischer Ortsvektor

Bedingung: $\mathrm{Det}\left[\left(\vec{\mathrm{a}}-\vec{b}\right),\vec{u},\vec{v}\right]=0$

$$k:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \text{Schnittpunkt: } S\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$$

❺ Gegeben ist ein Dreieck ABC mit den Punkten A(-1/2/-4), B(3/2/1) und C(5/-1/-6).

Berechnen Sie die drei Seitenmittelpunkte $M_{\overline{AB}}$, $M_{\overline{AC}}$ *und* $M_{\overline{BC}}$.

Lösung:

$$M_{\overline{AB}} = \frac{1}{2}\cdot\left[\begin{pmatrix}-1\\2\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}1\\2\\-1,5\end{pmatrix}$$

$$M_{\overline{AC}} = \frac{1}{2}\cdot\left[\begin{pmatrix}-1\\2\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\-1\\-6\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}2\\0,5\\-5\end{pmatrix}$$

$$M_{\overline{BC}} = \frac{1}{2}\cdot\left[\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\-1\\-6\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}4\\0,5\\-2,5\end{pmatrix}$$

Musterlösung **13. Jgst.** **1. Kursarbeit** **Datum: 15.10.2004**

Klasse: GY 02 c **Fach: Mathematik (Grundkurs)**

Thema 2: Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

BITTE GEBEN SIE ANSÄTZE UND RECHENWEGE AN!

Aufgabe 1: Kombinatorik: „Hällowien“

Der Fernmeldetechniker Rudi Ratlos war gestern abend auf einer Party, bei der es feucht fröhlich herging. Heute morgen um 7 Uhr musste er aber schon zu einem Kunden.
Dort soll er 10 Drähte mit 10 Anschlüssen verbinden. Wie oft muss er im ungünstigsten Fall probieren?

Lösung: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \quad = \quad 10!$

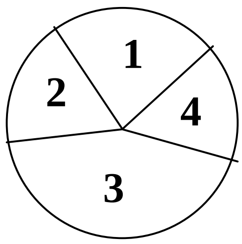
Aufgabe 2: Münzwurf

Eine ideale Münze wird 100 mal geworfen. Es tritt 100 mal „Wappen“ auf.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für „Wappen“ im nächsten Wurf?

Lösung: $$p\left("W"\right) = \frac{1}{2}$$

weil jedes Ereignis unabhängig vom vorherigen Ausgang zu bewerten ist.

Aufgabe 3: Glücksrad



Das nebenstehende Glücksrad ist entsprechend der Zeichnung in die

4 Sektoren aufgeteilt und besitzt folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

X = x	1	2	3	4
p(X=x)	0,26	0,17	0,40	0,17

Das Glücksrad wird **dreimal** hintereinander gedreht.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse

A („Die Augensumme ist höchstens 5.“)

Lösung: $$A = \left\{ (1/1/1); \underset{3\,Komb.}{(2/1/1)}; \underset{3\,Komb.}{(3/1/1)}; \underset{3\,Komb.}{(2/2/1)} \right\}$$

$$p\left(A\right) = 0,26^3 + 3 \cdot 0,17 \cdot 0,26^2 + 3 \cdot 0,4 \cdot 0,26^2 + 3 \cdot 0,17^2 \cdot 0,26$$

$$p\left(A\right) = 0,155714$$

B („Das Produkt der Augenzahlen ist 6.“)

Lösung:

$$B=\{\underbrace{(1/2/3)}_{6\,Komb.}\}$$

$$p(B)=6\cdot 0,26\cdot 0,17\cdot 0,4=0,10608$$

Aufgabe 4: Ereigniswahrscheinlichkeiten

Kantinenwirt Lecker bietet zwar jeden Tag mehrere Braten an, serviert aber zu jedem die gleiche Beilage, nämlich an 60 % der Tage Kartoffeln (k), an 30 % Nudeln (n) und sonst Reis (r).
Fritz isst an **fünf aufeinanderfolgenden** Tagen in der Kantine. Die Kollegen spötteln schon nach einem berühmten Kleist-Zitat: „Der Fritz geht solang zur Kantine bis er ...“ – na ja lassen wir das.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält er als Beilage

a) die Reihenfolge **k r k n k** ?

Lösung: $p(A)=0,6^3\cdot 0,3\cdot 0,1=0,00648$

b) nur am ersten Tag keine Kartoffeln, ansonsten immer Kartoffeln?

Lösung: $p(B)=0,4\cdot 0,6^4=0,05184$

c) mindestens an einem Tag keine Kartoffeln?

Lösung: $p(C)=1-0,6^5=0,92224$

Aufgabe 5: Würfelwahrscheinlichkeiten

Auf einem Würfel sind auf je zwei gegenüberliegenden Seiten die Ziffern 1 bzw. 2 bzw. 3 aufgetragen, wobei die gleichen Ziffern nicht unterscheidbar sind. Der Würfel wird dreimal nacheinander geworfen. Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten an:

A: „Es wird mindestens zweimal die 1 geworfen.“

Lösung:

$$A=\{(1/1/1);\underbrace{(1/1/2)}_{3\,Komb.};\underbrace{(1/1/3)}_{3\,Komb.}\}$$

$$p(A)=\left(\frac{1}{3}\right)^3+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{7}{27}$$

B: „Es wird höchstens zweimal die 1 geworfen.“

Lösung: mittels Gegenereignis
$\overline{B}$ = {(1/1/1)}

$$p(B)=1-\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{26}{27}$$

C: „Es wird genau einmal die 1 geworfen.“

Lösung:

$$C=\left\{\underbrace{(1/2/2)}_{3\,Komb.};\underbrace{(1/2/3)}_{6\,Komb.};\underbrace{(1/3/3)}_{3\,Komb.}\right\}$$

$$p(C)=3\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3+3\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{12}{27}$$

D: „Die 1 wird nicht geworfen.“

Lösung:

$$D=\left\{(2/2/2);\underbrace{(2/3/3)}_{3\,Komb.};\underbrace{(2/2/3)}_{3\,Komb.};(3/3/3)\right\}$$

$$p(D)=\left(\frac{1}{3}\right)^3+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$$

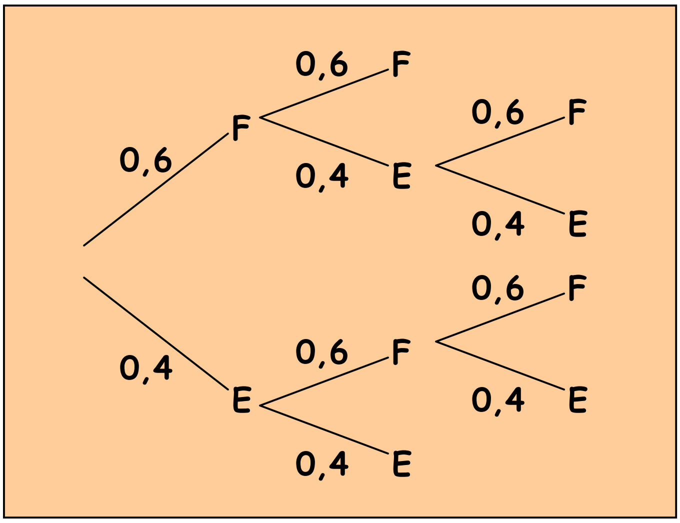
Aufgabe 6: Tischtenniswahrscheinlichkeiten

Fritz und Emil spielen gegeneinander Tischtennis. Fritz gewinnt einen Satz mit der Wahrscheinlichkeit von 0,6 (Spielstärke Fritz!!!)
Es gilt folgende Vereinbarung:

Sieger ist, wer zwei Sätze gewinnt, d.h. es müssen max. drei Sätze gespielt werden.

a) Bilden Sie das zugehörige Baumdiagramm.

Lösung:



b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse

(i) A = „Fritz gewinnt“ **Lösung:** $p(A)=0,6^2+2\cdot 0,6^2\cdot 0,4=0,648$

(ii) B = „Emil gewinnt“. **Lösung:** $p(B)=2\cdot 0,6\cdot 0,4^2+0,4^2=0,352$

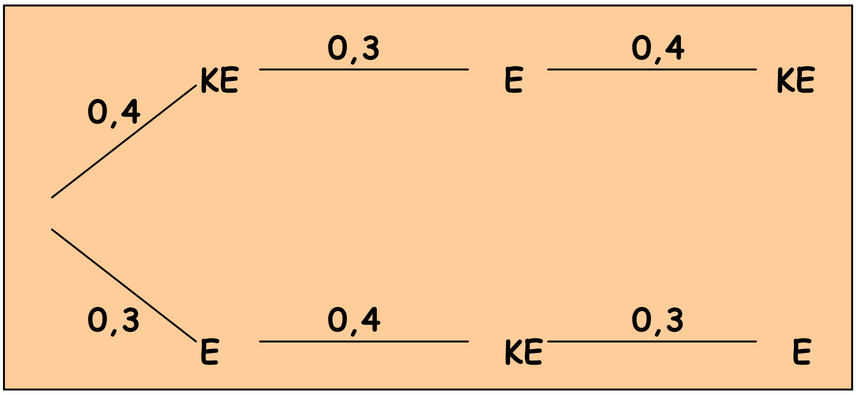
c) Nun kommt noch Klein-Erna hinzu.

Fritz soll abwechselnd gegen Emil und Klein-Erna spielen.

*Wenn er in drei Spielen zweimal hintereinander gewinnt,
bekommt er von den beiden eine Riesenpizza spendiert.*

In welcher Reihenfolge sollte er gegen seine beiden Gegner antreten, wenn er gegen Emil mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,7 und gegen Klein-Erna mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,6 verliert?

Lösung:



Spielreihenfolge 1: Sieg geg. KE und Sieg geg. E oder

Niederlage geg. KE, Sieg geg. E und Sieg geg. KE

$$p(\text{Reihenfolge 1}) = 0,4 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,4 = 0,192$$

Spielreihenfolge 1: Sieg geg. E und Sieg geg. KE oder

Niederlage geg. E, Sieg geg. KE und Sieg geg. E

$$p(\text{Reihenfolge 2}) = 0,3 \cdot 0,4 + 0,7 \cdot 0,4 \cdot 0,3 = 0,204$$

Antwort: Er sollte die zweite Spielreihenfolge wählen

und daher zuerst gegen Emil spielen.