Musterlösung: **12. Jgst.** **4. Kursarbeit** **Datum: 25.06.2004**

Klasse: GY 02 c **Fach: Mathematik (Grundkurs)**

Themen: **Anwendungen zu Matrizen**

1.) Ermitteln Sie die Determinantenwerte und die Inversen zu den gegebenen Matrizen:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$ $\quad Det(A)=10$ $\quad A^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}4 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

b) $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $\quad Det(B)=(-1)$ $\quad B^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

c) $C=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 4\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $\quad Det(C)=-15$ $\quad C^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{4}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{3}{5}\\ \frac{4}{15} & \frac{1}{15} & \frac{2}{5}\\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$

d) Wie können Sie prüfen, ob Ihre Inverse korrekt ist?

=> **Multiplikation der Matrix mit ihrer Inversen muss die Einheitsmatrix ergeben.**

2.) Für welche Werte von a sind die Matrizen M und N singulär?

$$M = \begin{pmatrix}-1 & a\\ a^3 & -81\end{pmatrix}$$

$$81 = a^4 \quad \Rightarrow \quad |a| = 3$$

$$N = \begin{pmatrix}a & 1 & 2a\\ 4 & a & 0\\ a & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$-2a^3-a^2+8a+4 = 0$$

$$L = \left\{-2; -\frac{1}{2}; 2\right\}$$

3.) Materialverflechtung auf verschiedenen Produktionsstufen:

Gegeben sind die Matrizen M_{RZ} und M_{ZE}.

$$M_{RZ} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix} \qquad M_{ZE} = \begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$$

a) Wie viele Rohstoffe benötigt man zur Produktion von einer Mengeneinheit des zweiten Zwischenproduktes?

=> $M_{RZ_2} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 3\end{pmatrix}^T$

b) Wie viele Endprodukttypen werden hergestellt?

=> **2 verschiedene Endprodukttypen**

c) Berechnen Sie die Matrix M_{RE}.

=> $M_{RZ}\cdot M_{ZE} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8 & 8\\ 18 & 11\\ 14 & 13\end{pmatrix}$

d) Welche Aussage liefert die Matrix M_{RE}?

Die Matrix gibt Auskunft über die Anzahl der Rohstoffe, die zur Produktion je eines Endprodukttyps benötigt wird.

e) Wie hoch ist der Rohstoffbedarf, wenn von Endprodukt E_1 20 Mengeneinheiten und von Endprodukt E_2 10 Mengeneinheiten hergestellt werden sollen?

=> $M_{RE}\cdot\begin{pmatrix}20\\ 10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8 & 8\\ 18 & 11\\ 14 & 13\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}20\\ 10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}240\\ 470\\ 410\end{pmatrix}$

f) Von den Rohstoffen sind folgende Mengen im Lager vorrätig:
R_1 = 400 ME, R_2 = 690 ME und R_3 = 670 ME.

Aufgrund von Lieferengpässen sind keine weiteren Rohstoff-lieferungen mehr möglich.

(i) Können wir einen Auftrag im Volumen $\begin{pmatrix} E_1 & E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 10 \end{pmatrix}$ ausführen?

=> $$M_{RE} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 18 & 11 \\ 14 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 830 \\ 690 \end{pmatrix}$$

Die Vorräte genügen nicht, um den Auftrag auszuführen.

(ii) Welches maximale Bestellvolumen könnten wir ausführen?

$$\left(\begin{array}{cc|c} 8 & 8 & 400 \\ 18 & 11 & 690 \\ 14 & 13 & 670 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{8}\cdot I}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 50 \\ 18 & 11 & 690 \\ 14 & 13 & 670 \end{array}\right) \xrightarrow[III-14\cdot I]{II-18\cdot I}$$

=> $$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 50 \\ 0 & -7 & -210 \\ 0 & -1 & -30 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{I+III \\ II-7\,III \\ (-1)\cdot III}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 30 \end{array}\right)$$

4.) ??? Gleichgewicht bei Autoliebhabern:

70 % der BMW-Fahrer würden bei einem Neukauf ihrem Fabrikat treu bleiben, 10 % hingegen würden auf Opel umsteigen.
Bei den Opel-Fahrern würden je 10 % auf VW- und BMW-Modelle umsteigen.
Die VW-Protagonisten würden zu 60 % wieder VW wählen, während 10 % sich für einen Opel entscheiden würden.

a) Ermitteln Sie aus diesen Daten die Übergangsmatrix U (BMW, Opel, VW).

=> $$U = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,3 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$$

Der derzeitige Marktanteil 2004 besagt, dass 50 % der Befragten BMW fahren, 30 % sind VW'ler und der Rest frönt den Opel-Modellen.

b) Erstellen Sie nun den Marktanteilsvektor $\vec{p}_{2004}$.

=> $$\vec{p}_{2004} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}^T$$

c) Wie stellt sich der Marktanteil voraussichtlich im Jahr 2005 dar?

=> $$\vec{p}_{2005} = \begin{pmatrix} 0,46 & 0,24 & 0,30 \end{pmatrix}^T$$

Aufgrund eingehender Recherchen hat sich ein Gleichgewicht bei $\vec{p}_{fest} = \begin{pmatrix} 0,67 & 0,12 & ? \end{pmatrix}$ gebildet.

d) Wie bezeichnet man dieses Gleichgewicht? Warum?

=> **Das Gleichgewicht wird als statisches Gleichgewicht bezeichnet, weil bei der Multiplikation der Übergangsmatrix mit dem Marktanteils-vektor $\vec{p}_x$ immer der gleiche Marktanteil als Ergebnis resultiert und daher das Gesamtverhalten als statisch erscheint, obwohl natürlich intern Bewegungen bzw. Veränderungen durchgeführt werden, die sich allerdings gegenseitig in ihrer Wirkung aufheben.**

e) Wie groß wäre bei diesem Gleichgewicht und 2.000 Autokunden der Umsatz der drei Autohersteller, wenn folgende durchschnittliche Verkaufspreise gelten:

BMW: 30.000,00 € Opel: 20.000,00 € VW: 25.000,00 €

$$\vec{p}_{fest} = \begin{pmatrix} 0,67 & 0,12 & 0,21 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,67 & 0,12 & 0,21 \end{pmatrix} \cdot 2.000 \cdot \begin{pmatrix} 30.000 & 20.000 & 25.000 \end{pmatrix} =$$

$$=> \begin{pmatrix} 1.340 & 240 & 420 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30.000 & 20.000 & 25.000 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 40.200.000 & 4.800.000 & 10.500.000 \end{pmatrix}$$

5.) Lineare Algebra und Analysis: ein Widerspruch?!

Gegeben ist die Matrix $A_t = \begin{pmatrix} -t+1 & t & t^2 \end{pmatrix}$.

a) Ermitteln Sie den Ausdruck $f(t) = A_t \cdot (A_t)^T$

$$f(t) = A_t \cdot (A_t)^T$$

$$=> f(t) = \begin{pmatrix} -t+1 & t & t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -t+1 & t & t^2 \end{pmatrix}^T$$

$$f(t) = t^4 + 2t^2 - 2t + 1$$

Gehen Sie nun von folgender Darstellung für f(t) aus:

$$f(t) = t^4 + 2t + 1$$

Anmerkung: Dies ist nicht das Ergebnis aus a)!!!

b) Zeigen Sie, dass f(t) sowohl bei x = -1 eine Nullstelle besitzt als auch eine Nullstelle im Intervall $I =]-1;0[$ existiert.

$$f(t) = t^4 + 2t + 1$$

$$\xrightarrow{(-1)\ eingesetzt} f(-1) = 0$$

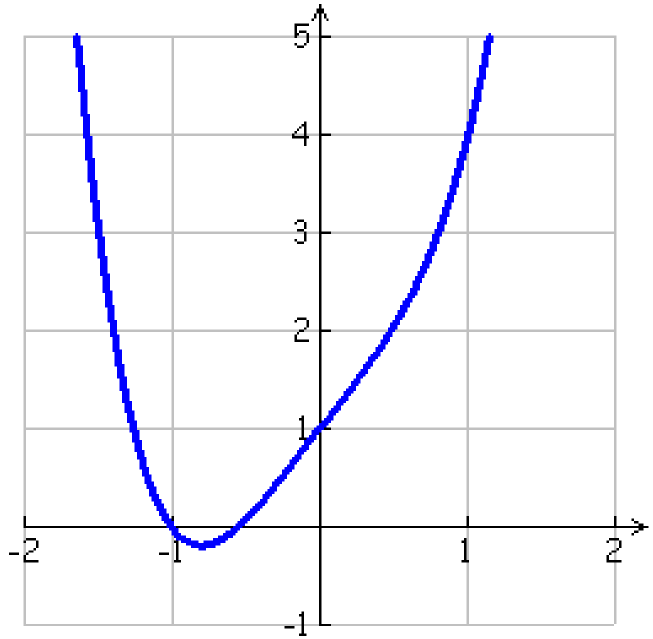
$$\xrightarrow{Polynomdivision} (t^4 + 2t + 1) : (t+1) = t^3 - t^2 + t + 1$$

$$Nullstellenprobe:$$

$$Vor.: \quad Stetigkeit$$

$$f^*(x) = t^3 - t^2 + t + 1$$

$$\left| \begin{array}{l} f^*(-0,9) < 0 \\ f^*(-0,3) > 0 \end{array} \right\rangle \quad Nullstelle\ existiert\ im\ Intervall\ [-0,9; -0,3]$$



b) Ermitteln Sie für f(t) auch noch die Extremwertstelle.

$$f(t) = t^4 + 2t + 1$$

$$f'(t) = 4t^3 + 2 \overset{!}{=} 0$$

$$t = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}}$$

=> $$f''(t) = 12t^2$$

$$f''\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}\right) = 12 \cdot \left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}\right)^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathit{Minimum}$$