Musterlösung **13. Jgst.** **4. Test** **Datum: 22.04.2005**

Klasse: GY 02 c **Fach: Mathematik (Grundkurs)**

Thema: **Analysis:** **Kurvenuntersuchung;** **Stochastik: Verteilungen**

1.) Eine faire Münze wird viermal geworfen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dreimal Wappen erscheint?

$$p=\frac{1}{2} \quad q=\frac{1}{2}$$

Lösung:

$$B_{4;\frac{1}{2}}(X=3) \quad = \quad 4\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2} \quad = \quad \frac{1}{4}$$

2.) Paul möchte sein Auto starten. Ihm ist bekannt, dass die Batterie mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 in Ordnung ist und dass die Zündkerzen jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,8 funktionieren.
Das Auto springt nur an, wenn die Batterie und mindestens drei der vier Zündkerzen funktionieren. Alle Ereignisse sind paarweise unabhängig.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit startet das Auto?

Lösung:

$$P(\text{"}start\text{"}) \quad = \quad \frac{1}{2}\cdot\left[\binom{4}{3}\cdot 0,8^3\cdot 0,2+\binom{4}{4}\cdot 0,8^4\cdot 0,2^0\right] \quad = \quad 0,4096$$

3.) Schüler Paul hat in seinem von Tante Elfriede geschenkten Kühlschrank 8 Eier. Zwei sind faul, allerdings weiß er dies nicht.
Für Rühreier greift er zufällig drei Eier heraus.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Essen

a) genießbar ist.
b) ungenießbar ist.

Lösung:

$$P(\text{"}genießbar\text{"}) \quad = \quad \frac{\binom{2}{0}\cdot\binom{6}{3}}{\binom{8}{3}} \quad = \quad \frac{5}{14} \quad = \quad 0,357$$

$$P(\text{"}ungenießbar\text{"}) \quad = \quad 1-P(\text{"}genießbar\text{"}) \quad = \quad 1-\frac{5}{14} \quad = \quad \frac{9}{14} \quad = \quad 0,643$$

4.) Bei einer Vergleichsarbeit mit einer maximaler Punktzahl von 100 seien die Ergebnisse normalverteilt mit μ = 60 und σ = 10.

Bestimmen Sie den Anteil der Schüler,

a) die weniger als 50 Punkte erreicht haben.
b) die zwischen 80 und 95 Punkte erreicht haben.

c) Auf welchen Wert muss die Mindestpunktzahl festgelegt werden, damit nicht mehr als 10 % der Schüler mangelhaft oder ungenügend erhalten.

Lösung:

$a) \quad P(X < 50)$

$$\Rightarrow \quad z \quad = \quad \frac{49-60}{10} \quad = \quad -1{,}1 \quad \Rightarrow \quad \varphi(-1{,}1) \quad = \quad 1-\varphi(1{,}1) \quad = \quad 0{,}136$$

$b) \quad P(79 < X \leq 95)$

$$\Rightarrow \quad z_1 \quad = \quad \frac{79-60}{10} \quad = \quad 1{,}9 \quad \Rightarrow \quad \varphi(1{,}9) \quad = \quad 0{,}97128$$

$$\Rightarrow \quad z_2 \quad = \quad \frac{95-60}{10} \quad = \quad 3{,}5 \quad \Rightarrow \quad \varphi(3{,}5) \quad = \quad 0{,}99977$$

$$\Rightarrow \quad P(79 < X \leq 95) \quad = \quad 0{,}99977 - 0{,}97128 \quad = \quad 0{,}02849$$

$$c) \quad \varphi(z) \quad \leq \quad 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad 1-\varphi(z) \quad > \quad 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad z = -1{,}29$$

$$\Rightarrow \quad -1{,}29 \quad = \quad \frac{x-60}{10} \quad \Rightarrow \quad x \quad = \quad 47{,}1 \quad \approx \quad 48\,[Punkte]$$

5.) Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades hat den Tiefpunkt T(0/-2) und den Wendepunkt W(1/0)

Bestimmen Sie die Funktionsvorschrift.

Lösung:

$I.) \quad -2 = d$ Grund: $\text{Min}(0 \mid 2)$

$II.) \quad 0 = a+b+c+d$ Grund: $\text{W}(1 \mid 0)$

$III.) \quad 0 = c$ Grund: bei x = 0 ist Minimum

$IV.) \quad 0 = 6a+2b$ Grund: bei x = 1 ist Wendepunkt

$$\Rightarrow \quad a = -1 \quad b = 3 \quad c = 0 \quad d = -2$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$$

6.) Gegeben sei die Funktion f(x) mit folgender Funktionsvorschrift:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + x}{x^2}$$

Bestimmen Sie folgende Eigenschaften der Funktion:

a) Definitionsbereich

Lösung: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

b) Symmetrie

Lösung:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - 3\cdot(-x)^2 + (-x)}{(-x)^2} = \frac{-x^3 - 3x^2 - x}{x^2}$$

$$\neq f(x) \, und \neq -f(-x) \quad \Rightarrow \quad keine\ Symmetrie$$

c) Nullstellen

Lösung:

$$x\left(x^2 - 3x + 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \quad \wedge \quad x_3 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = 2{,}62 \quad \wedge \quad x_3 = 0{,}382$$

$$Anmerkung: \quad x_1 = 0 \notin D_f$$

d) Polstellen und Asymptote

Lösung:

$$Polstelle: \quad x = 0 \, (mit\ VZW)$$

$$Asymptote: \quad a(x) = x - 3$$

e) Extremwerte

Lösung:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad |x| = 1$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$\Rightarrow \quad f''(1) = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad Min(1 \mid -1)$$

$$\Rightarrow \quad f''(-1) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad Max(-1 \mid -5)$$

f) Wendepunkte

Lösung: $f''(x) = \frac{2}{x^3} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad kein\,Wendepunkt$

g) Tangentengleichung in x = -2

Lösung:

$$f'(-2) = \frac{3}{4} \qquad f(-2) = -\frac{11}{2}$$

$$-\frac{11}{2} = \frac{3}{4} \cdot (-2) + b \quad \Rightarrow \quad b = -4$$

$$t(x) = \frac{3}{4}x - 4$$

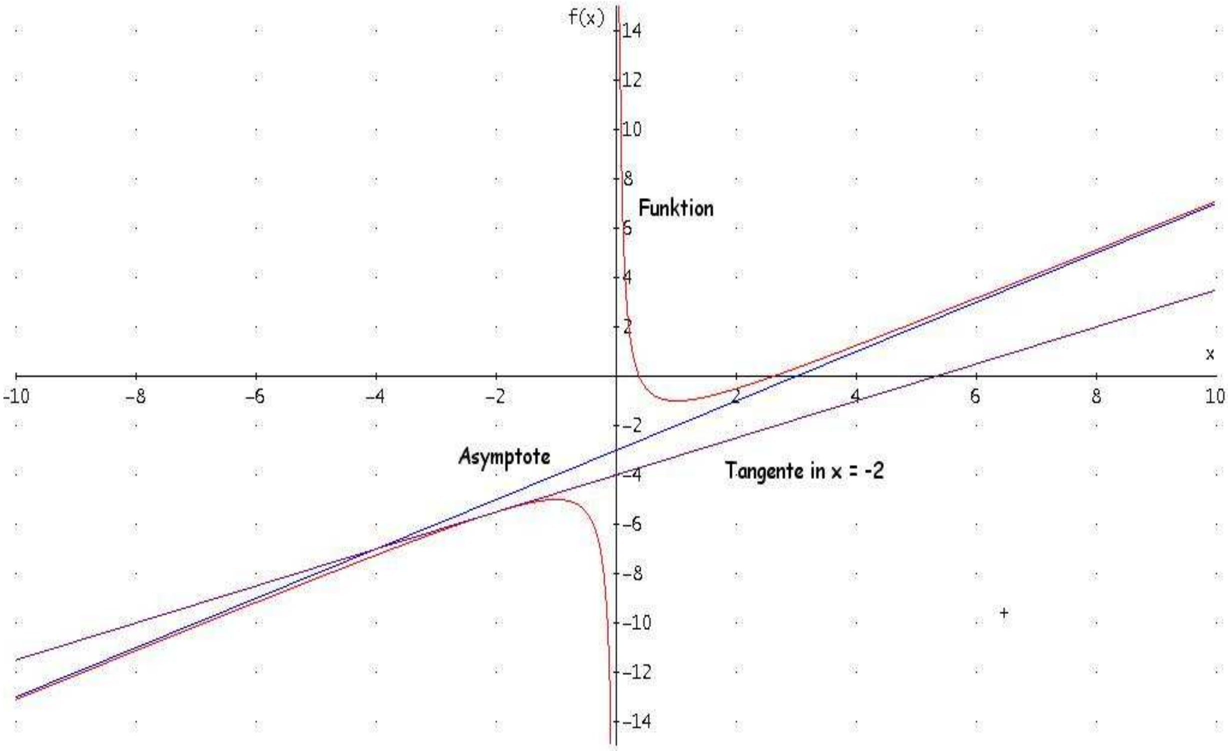
h) Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs

Lösung:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0+h} f(x) = \lim_{h \to 0+} \left(0 + h - 3 + \frac{1}{0+h}\right) = \lim_{h \to 0+} \left(h - 3 + \frac{1}{h}\right) = \infty$$

$$\lim_{x \to 0-h} f(x) = \lim_{h \to 0-} \left(0 - h - 3 + \frac{1}{0-h}\right) = \lim_{h \to 0-} \left(-h - 3 - \frac{1}{h}\right) = -\infty$$



7.) Gegeben sei nun die ganzrationale Funktion f(x) durch

$$f(x) \quad = \quad 4x - x^3$$

a) Untersuchen Sie die Funktion auf Symmetrie, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Hoch-, Tief- und Wendepunkte. Zeichnen Sie den Graphen aufgrund der Ergebnisse.

Lösung:

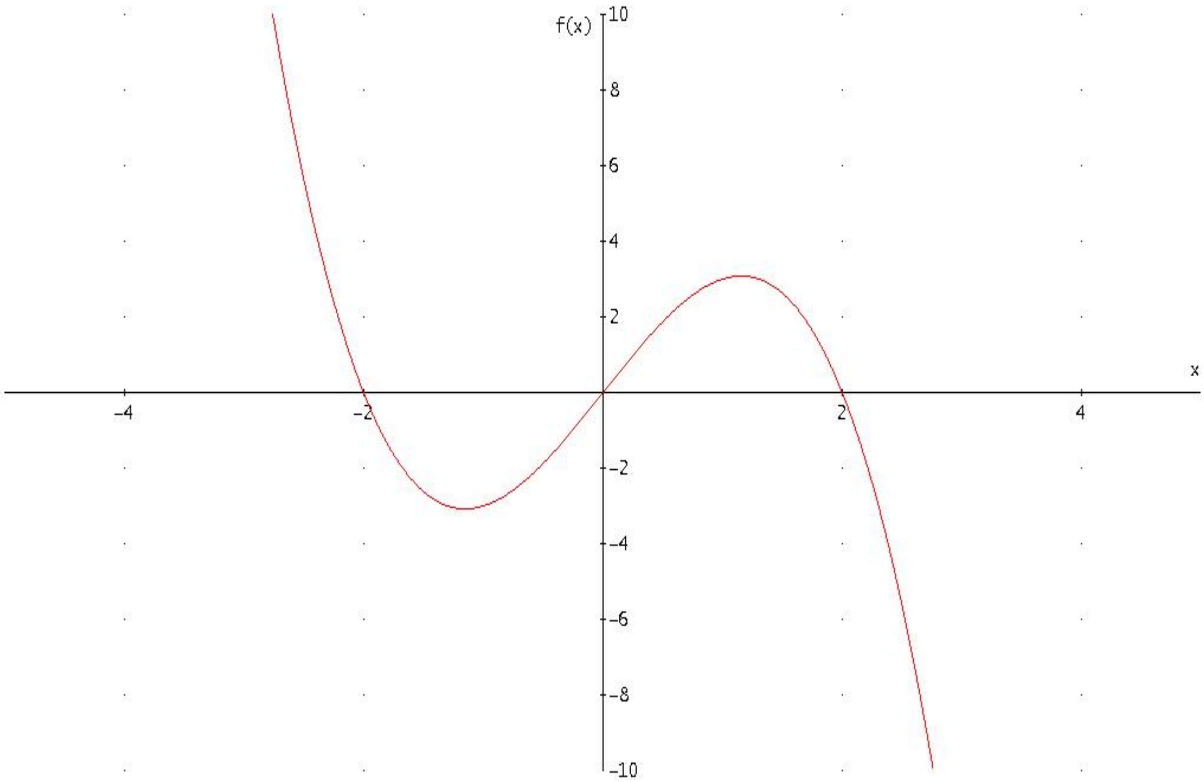
Symmetrie: Punktsymmetrie (ungerade Hochzahlen)

Nullstellen: $x_1 = 0$ $x_2 = 2$ $x_3 = -2$

Schnittpunkt mit y-Achse: S_y (0 / 0)

Extremwerte: $Max\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} \;\middle|\; \frac{16}{9}\sqrt{3}\right)$ $Min\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3} \;\middle|\; -\frac{16}{9}\sqrt{3}\right)$

Wendepunkt: W (0 / 0)



b) Berechnen Sie die Fläche der Funktion mit der x-Achse in den Grenzen [-2;2].

Lösung:

$$\int_{-2}^{2} \left(4x - x^3\right) dx \quad = \quad 2 \cdot \int_{0}^{2} \left(4x - x^3\right) dx \quad = \quad 2 \cdot \left(2x^2 - \frac{1}{4}x^4\right) \quad = \quad 8$$