Musterlösung

Mathematik (Kernfach) **11. Jgst.** **4. Kursarbeit** **Datum: 10.03.2004**
Klasse: GY 03 a - d

Themen: Funktionen, ganzrationale, gebr.-rat. und Exponentialfunktionen

Aufgabe 1: Untersuchen Sie nun die Funktion mit $f(x)=\frac{x-3}{x+1}$

a) Bestimmen Sie Definitionslücken und Achsenschnittpunkte des Graphen von f(x) und geben Sie den Definitionsbereich an!

$$D=\Re\setminus\{-1\} \quad\Rightarrow\quad \text{Defintionslücke bei} \quad x=-1$$

$$S_y(0\mid-3);\quad N(3\mid 0)$$

b) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs!

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x-3}{x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x-3}{x+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

c) Ermitteln Sie ggf. Polstellen, senkrechte Asymptoten (Pol-Asymptoten) und „waagrechte" Asymptoten (Näherungskurven)!

$$\text{Polstelle mit VZW bei} \quad x=-1$$

$$\text{Asymptote} \quad a(x) = 1$$

d) Welcher Graph (siehe unten) entspricht dieser Funktion?
Begründung mit drei Argumenten

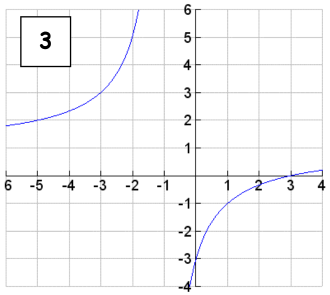
Graph 3

Gründe:

Nullstelle bei x = 3;

Polstelle bei x = - 1;

Schnittpunkt mit Ordinate: $S_y(0\mid-3)$



Aufgabe 2: Lesen Sie aus der folgenden Zeichnung ab

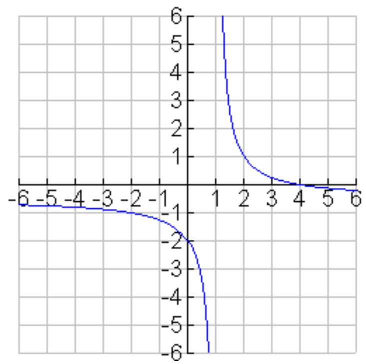
a) Nullstellen (Koordinaten) $N(4\mid 0)$

b) Schnittpunkt mit der y-Achse $S_y(0\mid-2)$

c) Gleichung der senkrechten Asymptoten $x = 1$

d) Gleichung der waagrechten Asymptoten $a(x) = -\frac{1}{2}$

e) Wie könnte der Funktionsterm heißen? $f(x) = \frac{x-4}{(-2)(x-1)}$



Aufgabe 3:
Untersuchen Sie nun die Funktion mit $f(x)=x^3-3x^2-9x-5$

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich. $D=\Re$

Zeigen Sie, dass x = -1 eine Nullstelle der Funktion darstellt und bestimmen sie die übrigen Nullstellen der Funktion f(x).

Hornerschema:

f(x) =	1,00 x³	-3,00 x²	-9,00 x	-5,00

x0	a(3)	a(2)	a(1)	a(0)	
	1,00	-3,00	-9,00	-5,00	
-1		-1,00	4,00	5,00	
	1,00	-4,00	-5,00	0,00	f(x0)

Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
(x^3-3x^2-9x-5):(x+1)=x^2-4x-5 \\
-\ x^3-x^2 \\
\quad -4x^2-9x \\
\quad\ \ 4x^2+4x \\
\qquad -5x-5 \\
\qquad\ \ 5x+5 \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$x^2-4x-5=0 \xrightarrow{\text{Lösungsformel}} x_2=-1 \quad \text{und} \quad x_3=5$$

b) Welche Symmetrieeigenschaften weist die Funktion auf?

Keine Symmetrieeigenschaften da gilt: $f(x)\neq f(-x)$ *und* $-f(x)\neq f(-x)$

c) Untersuchen Sie das Verhalten für $x\to\infty$ und $x\to-\infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(x^3-3x^2-9x+5\right) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x^3-3x^2-9x+5\right) = -\infty$$

d) Berechnen Sie die Schnittpunkte der Funktion f(x) mit $g(x)=x^3-2x^2-10x-11$

$$g(x)=f(x)$$

$$x^3-2x^2-10x-11 = x^3-3x^2-9x-5$$

$$-x^2+x+6 = 0$$

$$x_1=-2 \quad und \quad x_2=3$$

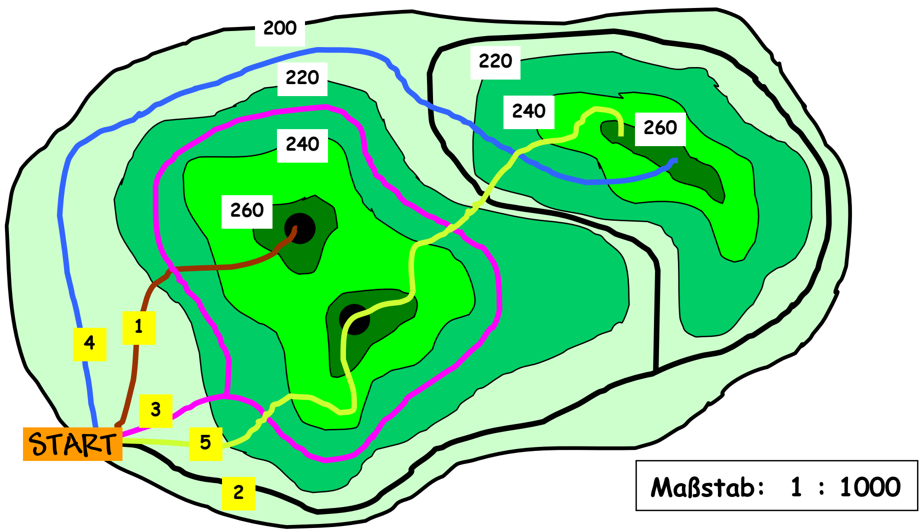
$$S_1(-2\mid-7) \quad und \quad S_2(3\mid-32)$$

e) In welchen Intervallen verläuft der Graph von f(x) ober(f(x)>0) - bzw. unterhalb (f(x)<0) der x-Achse?

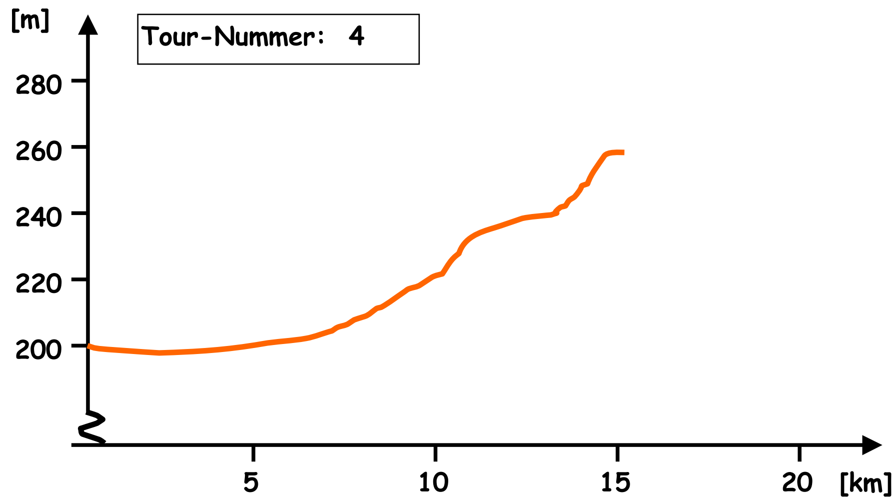
x < - 1	- 1 < x < 5	x > 5
$I_1 =]-\infty;\ -1[$	$I_1 =]-1;\ 5[$	$I_1 =]5;\ \infty[$
f(x) < 0	f(x) < 0	f(x) > 0

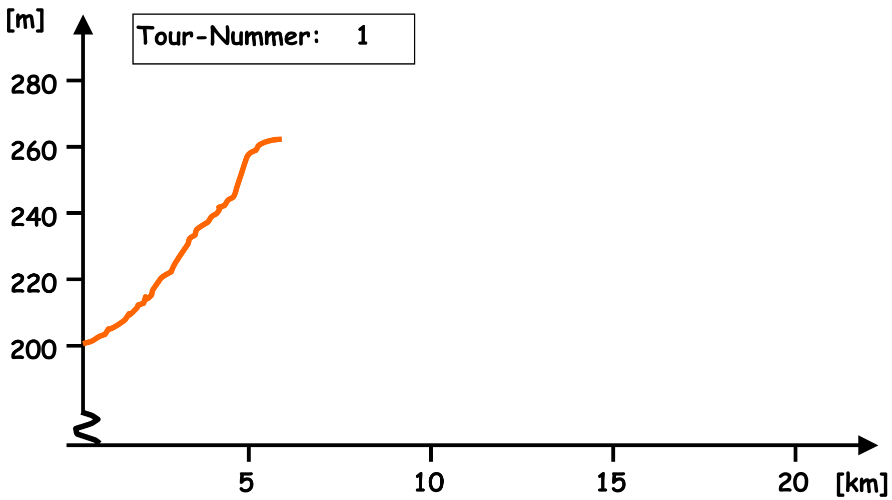
Reliefskizzen

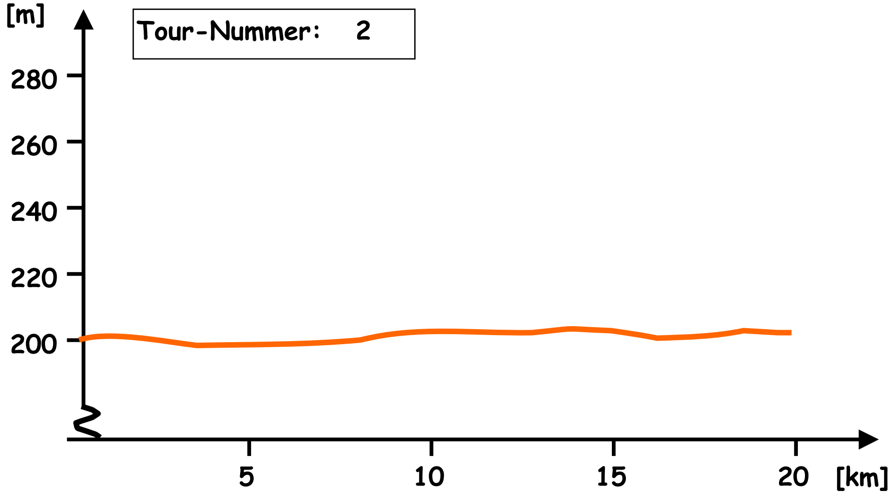
Hast du dir schon einmal eine Landkarte genauer angeschaut? Da gibt es Höhenlinien (Isohyäten), damit man genau weiß, wie steil oder flach die Landschaft ist. Ich habe ein paar Landkarten ausgegraben und Wege eingezeichnet.



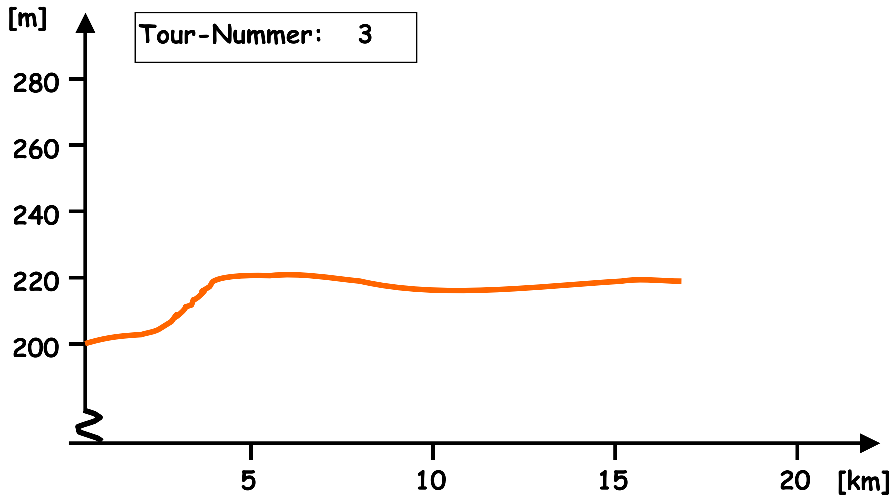
Aufgabe 4: Ordne die Wege 1 – 4 den 4 Höhendiagrammen zu.



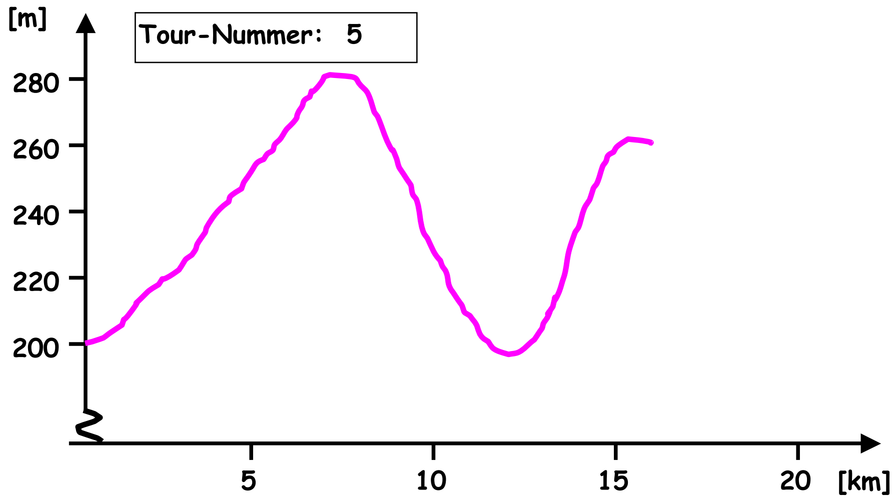




Zwischendurch eine kleine aber wichtige Anmerkung:
Obwohl der Weg in der Karte mehrere Kurven und Biegungen macht, kann die zugehörige Darstellung im Koordinatensystem eine mehr oder weniger gerade bzw. eben verlaufende Linie sein! Umgekehrt ist dies natürlich auch möglich!



Aufgabe 5: Aber da waren doch 5 Touren eingezeichnet. Stimmt! Die fünfte Tour sollen Sie jetzt hier einzeichnen.



Diese Aufgabe besteht aus Aufgabenteil A und B. Sie können entweder Aufgabenteil A ODER B bearbeiten.

TEIL A

Aufgabe 6: Bestimmen die Funktionsgleichung der Exponentialfunktion

$$f(x) = c \cdot a^x,$$

wenn diese durch die Punkte $P(1 \mid 6)$ und $Q(4 \mid 162)$ verlaufen soll.

$$f(x) = c \cdot a^x$$

$$I.)\quad 6 = c \cdot a^1 \quad und \quad II.)\quad 162 = c \cdot a^4$$

$$\xrightarrow{I.)\ in\ II.)} \quad 162 = 6 \cdot a^3$$

$$a^3 = 27 \Rightarrow a = 3$$

$$\xrightarrow{a=3\ in\ I.)} \quad 6 = c \cdot 3 \Rightarrow c = 2$$

$$\text{Ergebnis:} \quad f(x) = 2 \cdot 3^x$$

Aufgabe 7: Lösen Sie folgende Exponentialgleichungen:

a)

$$2^{3x+1} \cdot 8 = 4^2$$

$$2^{3x+1} = 2^1$$

$$\xrightarrow{\text{Exponentenvergleich}} \quad 3x + 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

b)

$$10^{2x-2} + 7 = 8$$

$$10^{2x-2} = 10^0$$

$$\xrightarrow{\text{Exponentenvergleich}} \quad 2x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

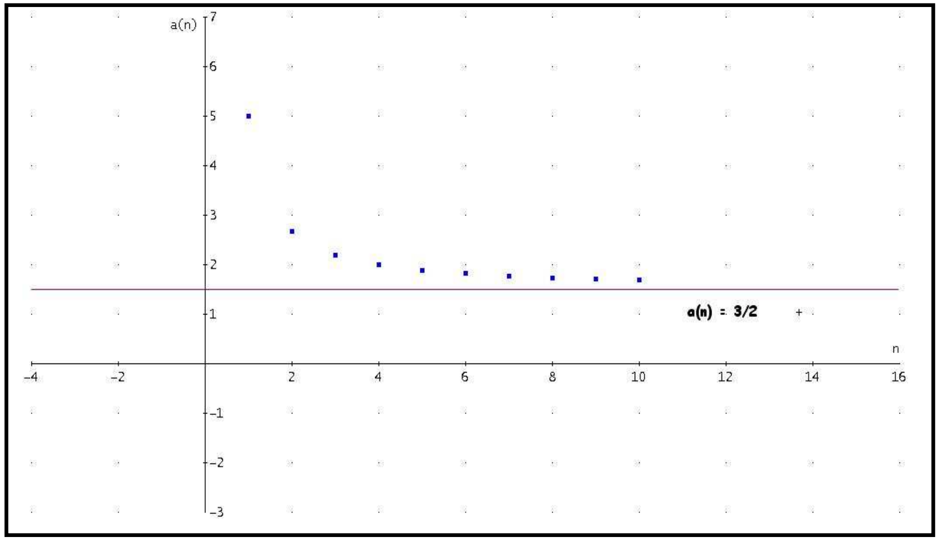
TEIL B

Aufgabe 8: Gegeben ist die Folge $f_n = \frac{3n+2}{2n-1}$.

a) Berechnen Sie die Folgenglieder für n=1,2,3,4,5 sowie n=10 in einer Wertetabelle.

n	1	2	3	4	5	10
f_n	5	$^8/_3$	$^{11}/_5$	2	$^{17}/_9$	$^{32}/_{19}$

b) Stellen Sie die Werte von a_1 bis a_5 in einem Koordinatensystem dar.



c) Bestimmen Sie den Grenzwert von f_n durch Zerlegung in Nullfolgen.

$$f_n = \frac{3n+2}{2n-1}$$

$$\lim_{n \to \infty} f_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{3n+2}{2n-1} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{3 + \frac{2}{n}}{2 - \frac{1}{n}} \right) = \frac{3}{2}$$

d) Zeichnen Sie die Grenzgerade y = a(n) in das Koordinatensystem ein.

Vgl. Skizze

e) Ab welchem n ist der Unterschied zwischen f_n und a zum ersten Mal kleiner als $1 \times 10^{-4} = 0{,}0001$?

Geben Sie den zugehörigen Wert für f_n an.

Lösung mittels Derive:

```
#9:   f(n) - a(n) < 0.0001
#10:  SOLVE(f(n) - a(n) < 0.0001, n, Real)
```

#11: $n < \frac{1}{2} \vee n > \frac{35001}{2}$

```
#12:  f(17501)
```

#13: $\frac{52505}{35001}$

#14: 1.500099997

etwas ausführlicher:

$$\varepsilon = \left| f_n - g \right| < 0{,}0001$$

$$\varepsilon = \left| \frac{3n+2}{2n-1} - \frac{3}{2} \right| < 0{,}0001$$

$$\varepsilon = \frac{3n+2}{2n-1} - \frac{3}{2} < 0{,}0001$$

$$\frac{3n+2}{2n-1} < 1{,}5001$$

$$3n+2 < 1{,}5001 \cdot (2n-1)$$

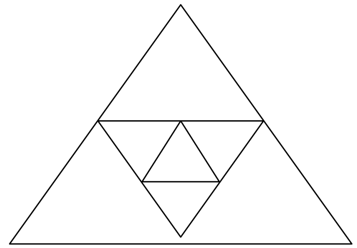
$$n > \frac{35.001}{2}$$

$$n \geq 17.501$$

Diese Aufgabe besteht aus Aufgabenteil A und B. Sie können entweder Aufgabenteil A ODER B bearbeiten.

TEIL A

Aufgabe 9: In ein gleichseitiges Dreieck soll jeweils an den Seitenmittelpunkten ein neues gleichseitiges Dreieck eingezeichnet werden.



a) Wie groß ist der Umfang der beiden inneren Dreiecke, wenn das große äußere Dreieck den Umfang U besitzt?

$$U(1) = u$$

$$U(2) = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot U(1) = \frac{1}{2} u$$

$$U(3) = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot U(2) = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} u = \frac{1}{4} u$$

b) Wie lautet die zugehörige (Umfang-)Exponentialfunktion?

$$U(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u$$

c) Wie groß ist der Umfang aller Dreiecke zusammen, wenn die Anzahl n der Dreiecke gegen ∞ strebt?

$$U(n) = u + u\cdot\frac{1}{2} + u\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + u\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \xrightarrow{\cdot\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$U(n)\cdot\frac{1}{2} = u\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + u\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + u\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + u\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

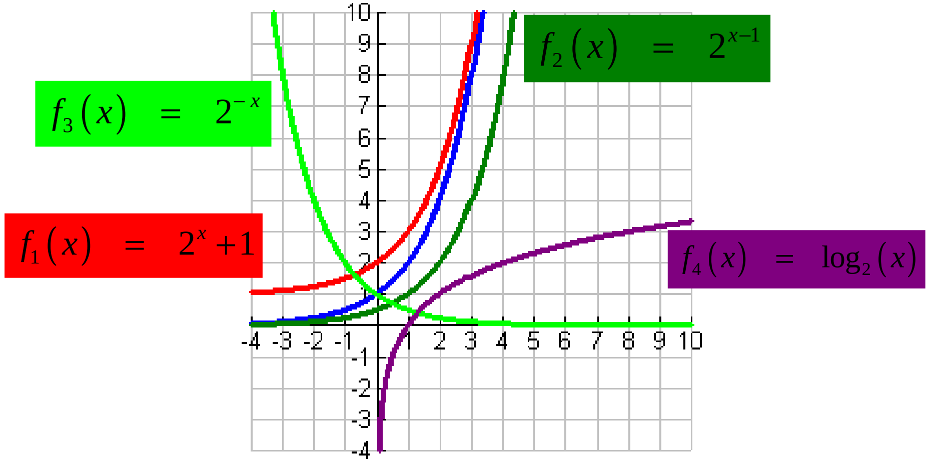
$$U(n) - U(n)\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = u - u\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$U(n)\cdot\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)\right] = u\cdot\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$$U(n) = \frac{u\cdot\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}} \xrightarrow{\lim\limits_{n\to\infty} g(n)} \lim_{n\to\infty} U(n) = \frac{u}{\frac{1}{2}} = 2u$$

Aufgabe 10:

Es sei der Graph der Funktion $f(x) = 2^x$ gegeben.
Zeichnen Sie die übrigen Funktionen in das Koordinatensystem ohne Wertetabellen zu erstellen:



TEIL B

Aufgabe 11:

Ein Gemälde hat zu Beginn einen Wert von 1000,-€. Sein Wert steigt jährlich um 25%.

a) Wie lautet die Formel zur Berechnung seines Wertes nach n Jahren?

$$W(n) = 1.000\cdot 1,25^n$$

b) Wie groß ist somit sein Wert nach 10 Jahren?

$$W(10) = 1.000\cdot 1,25^{10}$$
$$W(10) = 9.313,23$$

c) Nach wie vielen Jahren wird zum ersten Mal das Dreifache des Anfangswertes überschritten?
Berechnen Sie das zugehörige n sowie den Wert des Gemäldes.

$$1.000\cdot 1,25^n \geq 3.000$$
$$1,25^n \geq 3$$
$$n\cdot\ln(1,25) \geq \ln(3)$$
$$n \geq \frac{\ln(3)}{\ln(1,25)}$$
$$n \geq 4,92$$
$$n \geq 5\,[\text{Jahre}]$$
$$W(5) = 3.051,76$$