

**Themen:** Funktionen, Lineare  
Funktionen und Anwendungen

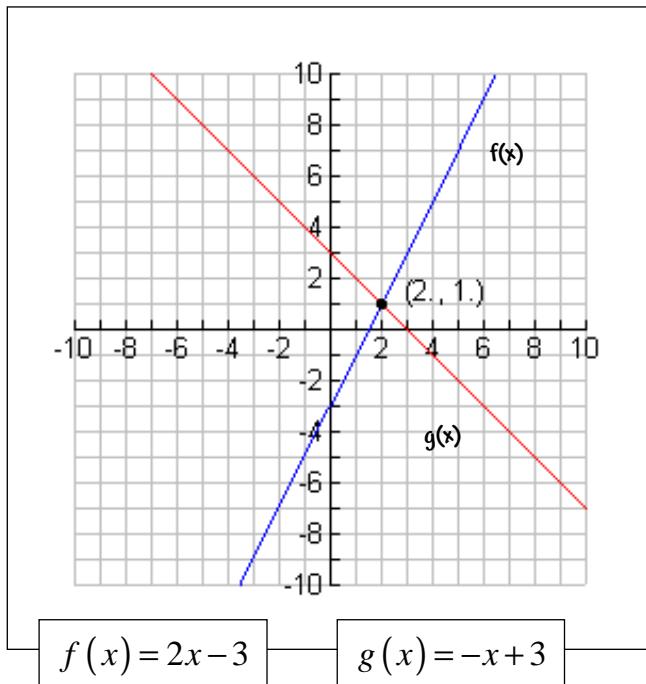
**Aufgabe 1:** Beurteilen Sie ob die jeweiligen Graphen bzw. Darstellungen eine Funktion bilden oder nicht.

=> **Anlage 1**

**Aufgabe 2:** Welcher Funktionsgraph passt?

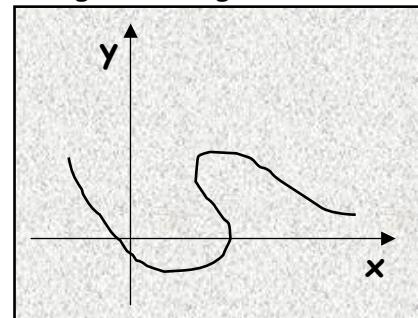
=> **Anlage 2**

**Aufgabe 3:** Ermitteln Sie die Funktionsvorschriften der beiden linearen Funktionen

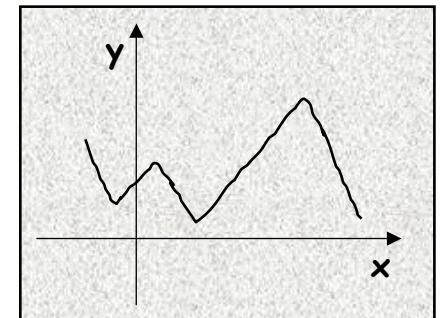


Lösung durch Ablesen des Achsenabschnitts der y-Achse und der Steigung.

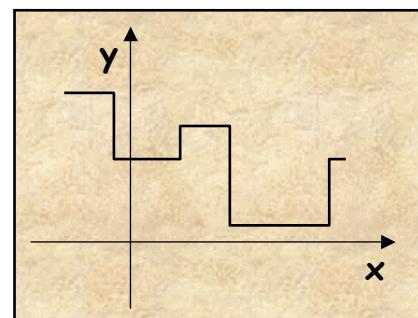
**Anlage zu Aufgabe 1:**



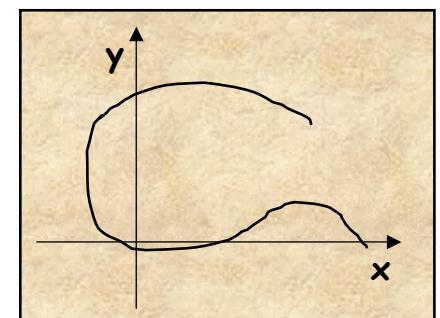
Funktion:  Nein



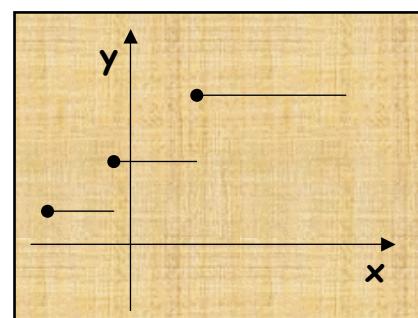
Funktion:  Ja



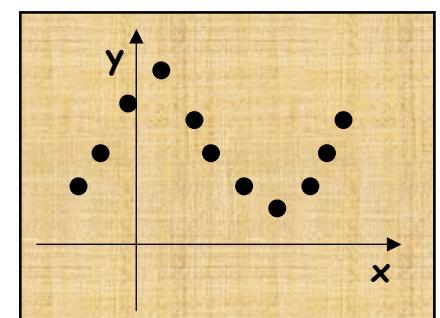
Funktion:  Nein



Funktion:  Nein

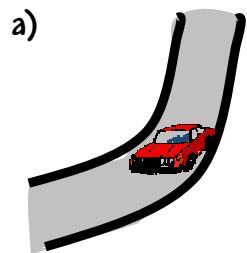


Funktion:  Ja

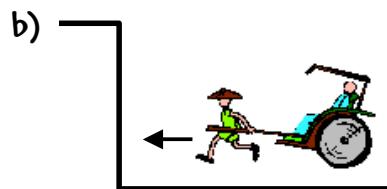
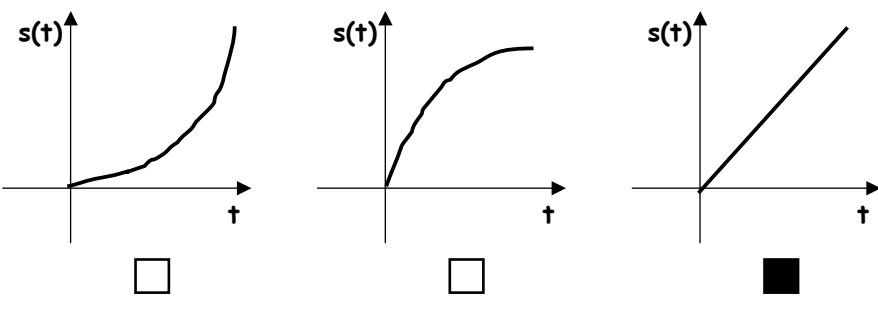


Funktion:  Ja

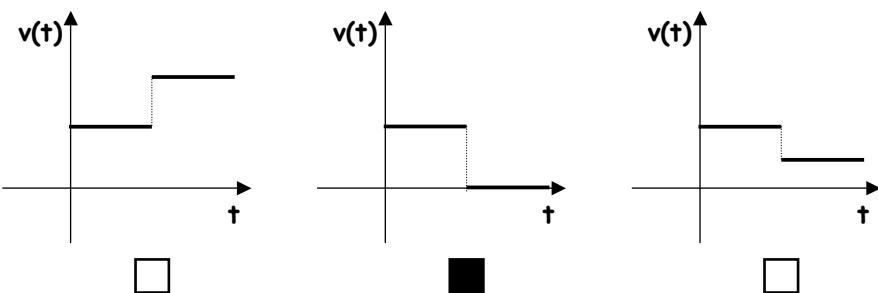
## Anlage zu Aufgabe 2:



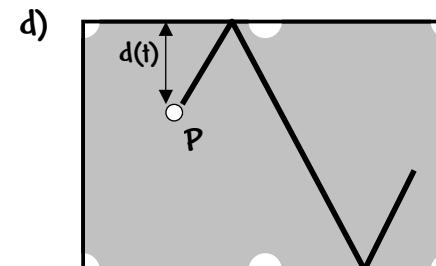
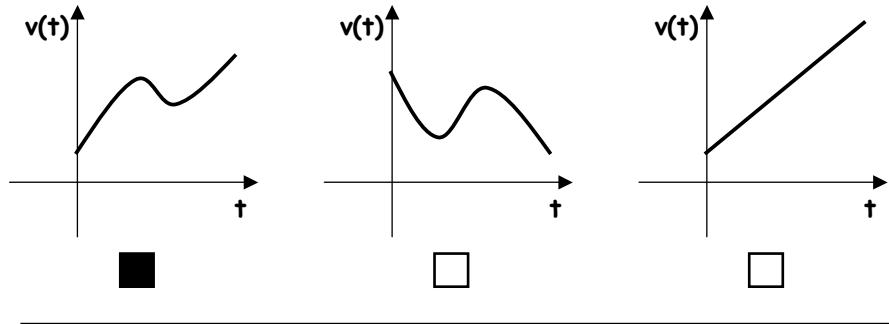
Das Auto bewegt sich mit gleich bleibender Geschwindigkeit.  
Der Funktionswert  $s(t)$  gibt den zurückgelegten Weg zum Zeitpunkt  $t$  an.



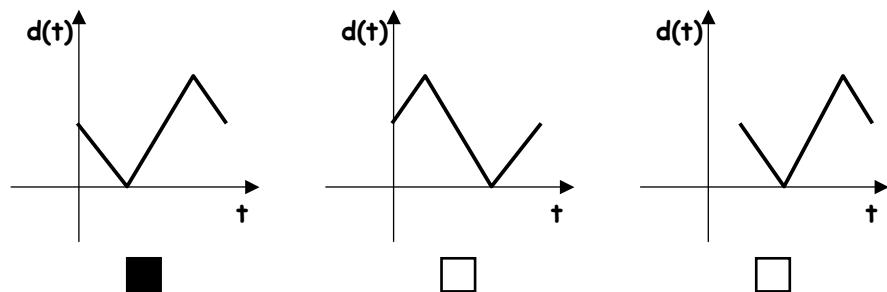
Der Rikscha-Fahrer läuft in die angegebene Richtung. Der Funktionswert  $v(t)$  gibt die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t$  an.



Der Skifahrer fährt den Hang hinunter.  
Der Funktionswert  $v(t)$  gibt die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t$  an.



Vom Punkt  $P$  aus wird eine Billardkugel längs der angegebenen Bahn geschossen.  
Der Funktionswert  $d(t)$  gibt den Abstand vom oberen Rand der Tischfläche an.



**Aufgabe 4:** Sind die Funktionen gleich oder ungleich? Begründen Sie Ihre Entscheidungen!

$$a) \quad f(x) = x^2 + 1 \quad g(t) = \frac{t^3 + t}{t}$$

Die beiden Funktionen sind ungleich, weil  $g(t)$  nicht für den Wert  $t = 0$  definiert ist.

$$b) \quad f(x) = (x-1)(x+1) \quad g(t) = t^2 - 1$$

Die beiden Funktionen sind gleich (3. Binomische Formel!).

$$c) \quad f(x) = \frac{x}{x^2 - x} \quad g(t) = \frac{t^2}{t^4 - t^2}$$

Die beiden Funktionen sind ungleich, weil

⇒ sich die Funktionsvorschriften unterscheiden und

⇒ die beiden Definitionsmengen  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$  und  $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1;0;1\}$  unterschiedlich sind.

**Aufgabe 5:** Rekursiv definierte Funktionen

a) Berechnen Sie die Funktionswerte  $f(n)$  für  $n \in [1; 5]$

$$(i) \quad f(0) = 1; \quad f(n) = 2 * f(n-1)$$

$$(ii) \quad f(0) = 1; \quad f(n) = n * f(n-1)$$

n	0	1	2	3	4	5
(i) f(n)	1	2	4	8	16	32
(ii) f(n)	1	1	2	6	24	120

b) Geben Sie für (i) eine explizite Funktionsgleichung an.

$$(i) \quad f(n) = 2^n$$

**Aufgabe 6:** Gegeben sei die Funktion  $f(x)$  mit der Vorschrift  $f(x) = 3^x$ .

a) Berechnen Sie  $f(4)$ ,  $f(-2)$  und  $f(-\frac{1}{4})$ .

$$f(4) = 3^4 = 81 \quad f(-2) = 3^{-2} = \frac{1}{9} \quad f\left(-\frac{1}{4}\right) = 3^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} = 0,7598$$

b) Für welche  $x \in \mathfrak{R}$  gilt:  $f(x) = 2.187$ ?

$3^x = 2187$
$3^x = 3^7$
$x = 7$

c) Für welche  $x \in \mathbb{N}$  gilt:  $f(x) \leq 7.000$ ?

$$\begin{aligned} 3^x &= 7000 \\ \log(3^x) &= \log(7000) \\ x * \log(3) &= \log(7000) \\ x &= \frac{\log(7000)}{\log(3)} \\ x &= 8,0589 \\ x &= 8 \text{ wegen } x \text{ aus Menge } N. \end{aligned}$$

d) Beweisen Sie folgende Behauptungen:

$$(i) \quad f(x) * f(-x) = 1 \quad \forall x \in \mathfrak{R}$$

Beweis (i):

$$\text{Beh.: } f(x) * f(-x) = 1 \quad \forall x \in \mathfrak{R}$$

$$\text{Bew.: } f(x) * f(-x) = 3^x * 3^{-x} = 3^0 = 1$$

q.e.d.

$$(ii) \quad f(x+1) = 3 * f(x) \quad \forall x \in \mathfrak{R}$$

Beweis (ii):

$$\text{Beh.: } f(x+1) = 3 * f(x) \quad \forall x \in \mathfrak{R}$$

$$\text{Bew.: } f(x+1) = 3^{x+1} = 3^x * 3 = 3 * f(x)$$

q.e.d.

**Aufgabe 7:** Bestimmen Sie die Geradengleichungen, wenn folgende Größen bekannt sind:

a) A (2 / 1)      B (8 / 5)

$$\begin{array}{l} I.) \quad 1 = 2m + b \\ II.) \quad 5 = 8m + b \\ \hline II.) - I.) \quad 4 = 6m \end{array}$$

$$m = \frac{2}{3}$$

m eingesetzt in I.)

$$1 = 2 * \frac{2}{3} + b$$

$$b = -\frac{1}{3}$$

$$g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

b) A (2 / 4)      m = -2

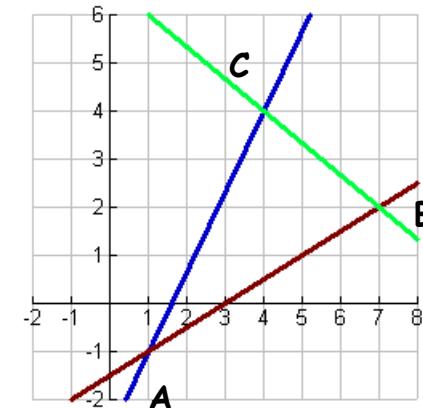
c) A (1 / 1)      Steigungswinkel:  $\alpha = 45^\circ$

$$\begin{array}{l} 4 = (-2) * 2 + b \\ b = 8 \\ g(x) = (-2)x + 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \alpha = 45^\circ \Rightarrow \tan(\alpha) = 1 = m \\ 1 = 1 * 1 + b \\ b = 0 \\ g(x) = x \end{array}$$

**Aufgabe 8:**

a) Prüfen Sie, ob das Dreieck in C einen rechten Winkel besitzt.



$$\left. \begin{array}{l} m_{AC} = \frac{4 - (-1)}{4 - 1} = \frac{5}{3} \\ m_{BC} = \frac{4 - 2}{4 - 7} = -\frac{2}{3} \end{array} \right\} m_{AC} * m_{BC} = \frac{5}{3} * \left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{10}{9}\right) \neq -1$$

Im Punkt C existiert kein rechter Winkel.

b) Wie lang ist die Strecke  $\overline{AB}$ ?

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(7-1)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} \approx 6,7$$

c) Konstruieren Sie den Umkreismittelpunkt und den Umkreis des Dreiecks.

d) Beschreiben Sie die notwendigen Rechenschritte zur Ermittlung des Umkreismittelpunktes.

⇒ **Ermittlung der Mittelpunkte der Dreieckseiten**

⇒ **Bildung der Senkrechten durch die Mittelpunkte (Mittelsenkrechten) mit Hilfe der Normalensteigung zu den Steigungen der Dreieckseiten**

⇒ **Berechnung des Schnittpunktes der Mittelsenkrechten**

### Berechnung des Umkreismittelpunktes und der Fläche des Umkreises:

Schritt 1: Ermittlung der Funktionsgleichung von zwei Mittelsenkrechten

Mittelsenkrechte auf  $\overline{AC}$

$$\text{Steigung: } m_{AC} = \frac{5}{3} \rightarrow m_{AC\perp} = -\frac{3}{5}$$

Mittelpunkt der Strecke  $\overline{AC}$ :

$$\left. \begin{array}{l} x-\text{Wert} = \frac{1}{2}(4+1) = 2,5 \\ y-\text{Wert} = \frac{1}{2}(4+(-1)) = 1,5 \end{array} \right\} M_{\overline{AC}}(2,5 / 1,5)$$

Funktionsgleichung der Mittelsenkrechten auf  $\overline{AC}$ :

$$1,5 = -\frac{3}{5} * 2,5 + b$$

$$1,5 = -\frac{3}{5} * \frac{5}{2} + b$$

$$\frac{3}{2} = -\frac{3}{2} + b$$

$$3 = b$$

$$g_{M_{\overline{AC}\perp}}(x) = -\frac{3}{5}x + 3$$

Mittelsenkrechte auf  $\overline{BC}$

$$\text{Steigung: } m_{BC} = -\frac{2}{3} \rightarrow m_{BC\perp} = \frac{3}{2}$$

Mittelpunkt der Strecke  $\overline{BC}$ :

$$\left. \begin{array}{l} x-\text{Wert} = \frac{1}{2}(7+4) = 5,5 \\ y-\text{Wert} = \frac{1}{2}(2+4) = 3 \end{array} \right\} M_{\overline{BC}}(5,5 / 3)$$

Funktionsgleichung der Mittelsenkrechten auf  $\overline{BC}$ :

$$3 = \frac{3}{2} * 5,5 + b$$

$$3 = \frac{3}{2} * \frac{11}{2} + b$$

$$3 = \frac{33}{4} + b$$

$$b = -\frac{21}{4}$$

$$g_{M_{\overline{BC}\perp}}(x) = \frac{3}{2}x - \frac{21}{4}$$

Schritt 2: Ermittlung des Umkreismittelpunktes durch Gleichsetzen der beiden  
Mittelsenkrechten

$$g_{M_{\overline{AC}\perp}}(x) = g_{M_{\overline{BC}\perp}}(x)$$

$$-\frac{3}{5}x + 3 = \frac{3}{2}x - \frac{21}{4}$$

$$\left(-\frac{6}{10} - \frac{15}{10}\right)x = -\frac{12}{4} - \frac{21}{4}$$

$$-\frac{21}{10}x = -\frac{33}{4}$$

$$x = \frac{55}{14}$$

$$y = \frac{9}{14}$$

$$\text{Umkreismittelpunkt: } U_M \left( \frac{55}{14} / \frac{9}{14} \right)$$

$$\text{Umkreismittelpunkt: } U_M (3,93 / 0,64)$$

Schritt 3: Berechnung der Fläche des Umkreises

*Radius:*

$$|\overline{UA}| = |\overline{UB}| = |\overline{UC}|$$

$$|\overline{UA}| = \sqrt{\left(\frac{55}{14} - 1\right)^2 + \left(\frac{9}{14} + 1\right)^2}$$

$$|\overline{UA}| = \sqrt{2,929^2 + 1,643^2}$$

$$|\overline{UA}| = \sqrt{11,276}$$

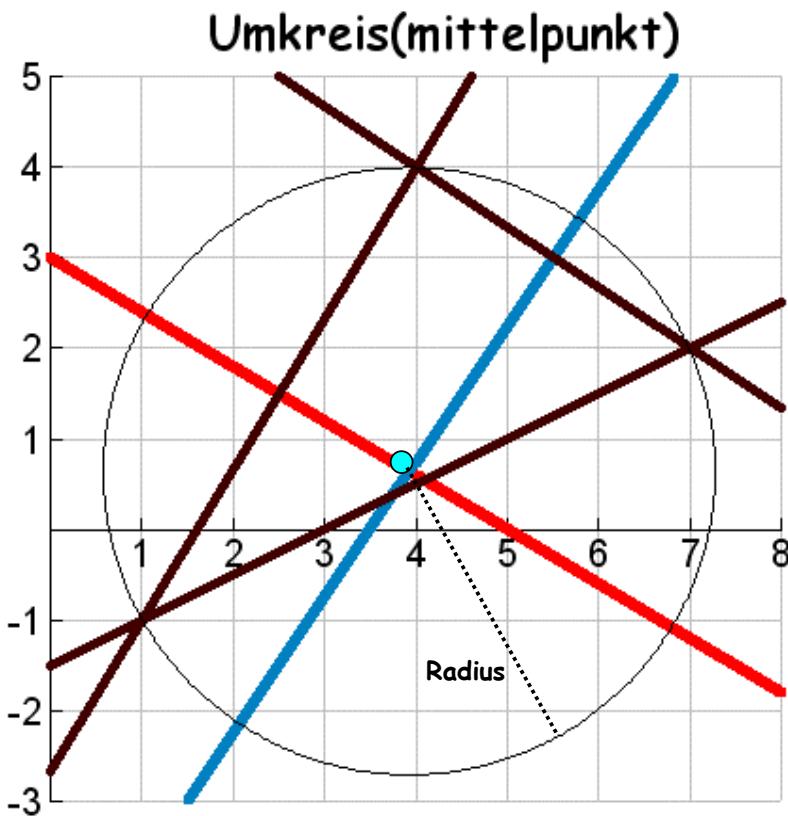
$$|\overline{UA}| = 3,358$$

*Fläche:*

$$A = r^2 \pi$$

$$A = 3,358^2 \pi$$

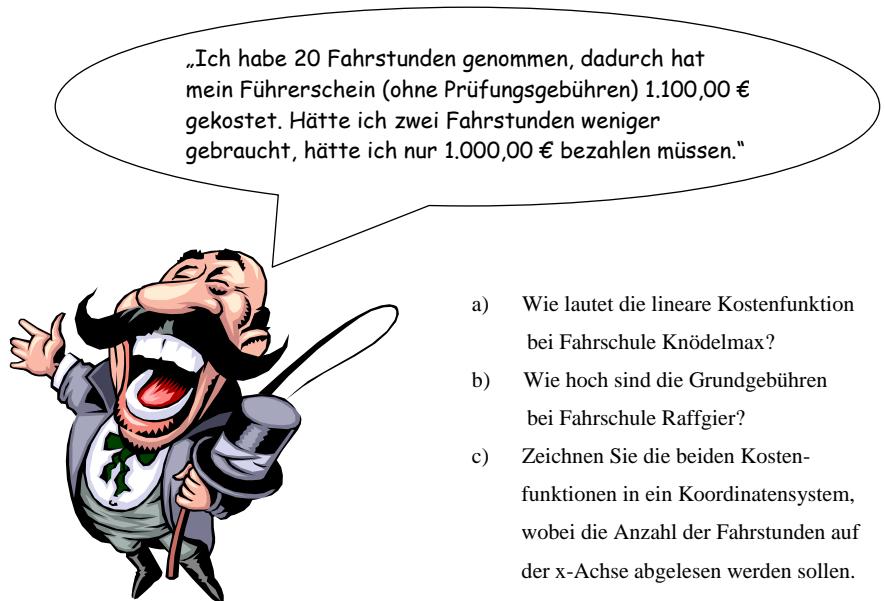
$$A = 35,423 [cm^2]$$



**Aufgabe 9:** Tarifvergleich bei zwei Fahrschulen

Fahrschule Knödelmax: Grundgebühr 250,00 €; KostenFahrstunde: 30,00 €

Fahrschule Raffgier: Tarife konnte man leider keine erhalten, allerdings hat ein Fahrschüler folgendes gesagt:



- Wie lautet die lineare Kostenfunktion bei Fahrschule Knödelmax?
- Wie hoch sind die Grundgebühren bei Fahrschule Raffgier?
- Zeichnen Sie die beiden Kostenfunktionen in ein Koordinatensystem, wobei die Anzahl der Fahrstunden auf der x-Achse abgelesen werden sollen.
- Bei wie viel Fahrstunden ist die Fahrschule Raffgier günstiger als die Fahrschule Knödelmax? Berechnung erwünscht mit Ergebnis als Intervall!

Lösungen:

Kosten pro  
Fahrstunde

Grundgebühr

Zu a)  $f(x) = 30x + 250$

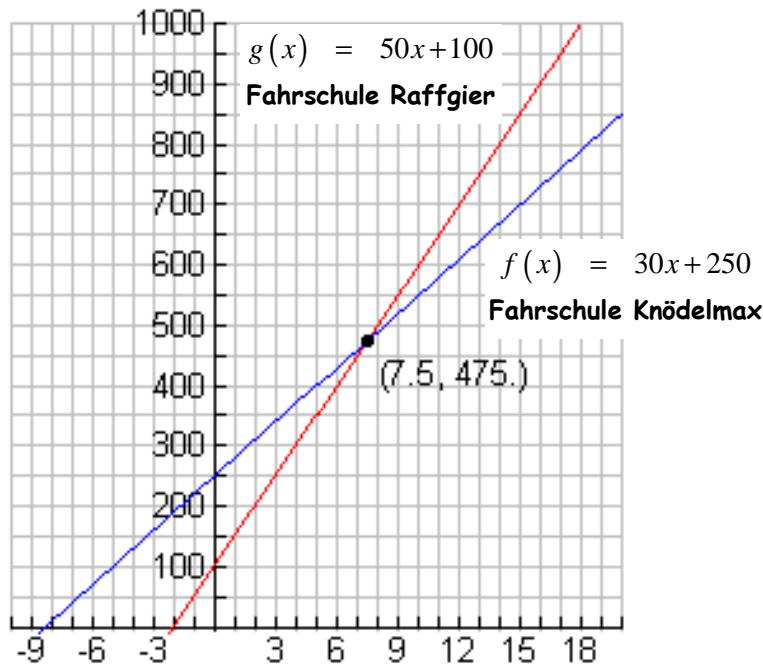
Zu b) **Grundgebühr: 100,00 €**

Herleitung:  $1.100,00 - 1.000,00 = 100,00 \text{ €}$

100 € entsprechen 2 Fahrstunden  $\Rightarrow 50 \text{ € pro Fahrstunde}$

20 Fahrstunden kosten 1.000,00 €, da er 1.100,00 € zahlen musste,  
beträgt die Grundgebühr hiermit 100,00 €.

Zu c) und d)



$$30x + 250 = 50x + 100$$

$$20x = 150$$

$$x = 7,5 \quad [Fahrstunden]$$

*Ergebnis :*

[0; 7] Fahrstunden Fahrschule Raffgier

[8;  $\infty$ ] Fahrstunden Fahrschule Knödel max

Anlage zu Aufgabe 5 a)

D:\Arbeit\_Mathematik\rekursiv1.exe

Geben Sie die Anzahl der Werte ein, die berechnet werden sollen.

5

Zahl n = 0 : 1  
Zahl n = 1 : 2  
Zahl n = 2 : 4  
Zahl n = 3 : 8  
Zahl n = 4 : 16  
Zahl n = 5 : 32

Zahl n = 0 : 1  
Zahl n = 1 : 1  
Zahl n = 2 : 2  
Zahl n = 3 : 6  
Zahl n = 4 : 24  
Zahl n = 5 : 120

Wollen Sie eine weitere Anzahl eingeben? (J)a oder (N)ein?

//Quellcode zu rekursiv definierte Funktionen

```
#include <iostream.h>
#include <stdio.h>
#include <ctype.h>

int main()
{
    int i, start, anzahl, ziffer1, ziffer2;
    char antwort;
    do
    {
        cout << "\nGeben Sie die Anzahl der Werte ein, die berechnet werden sollen.\t";
        cin >> anzahl;
        ziffer1=1, ziffer2=1;
        cout << "\n";
        for(i=0; i<=anzahl; i++)
        {
            cout << "\tZahl n = " << i << " : " << ziffer1 << "\n";
            ziffer1 = 2*ziffer1;
        }
        cout << "\n";
        for(i=0; i<=anzahl; i++)
        {
            cout << "\tZahl n = " << i << " : " << ziffer2 << "\n";
            ziffer2 = (i+1)*ziffer2;
        }
        cout << "\n\nWollen Sie eine weitere Anzahl eingeben? (J)a oder (N)ein?";
        cin >> antwort;
        antwort = toupper(antwort);
    }
    while (antwort=='J');
    cout << "Und tschuess ...";
    cin.ignore();
    getchar();
    return 0;
}
```