Musterlösung **13. Jgst.** **1. Kursarbeit** **Datum: 11.10.2005**

Klasse: GY 03 c **Fach: Mathematik (Leistungskurs)**

Themen: Stochastik: Ereignisse & Kombinatorik

1.) Ergebnisraum

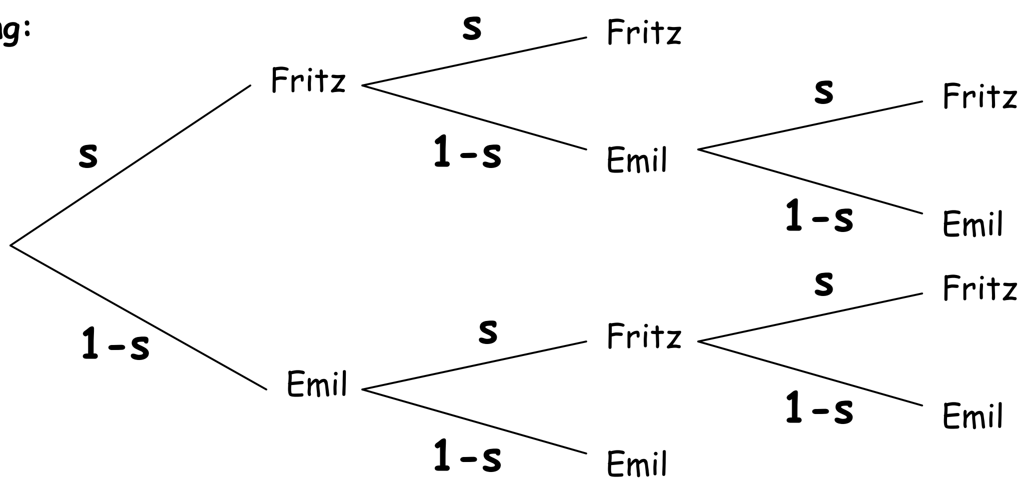
Fritz und Emil spielen gegeneinander Tischtennis. Fritz gewinnt einen Satz mit der Wahrscheinlichkeit von s (Spielstärke Fritz!!!)

Es gilt folgende Vereinbarung:

Sieger ist, wer zwei Sätze gewinnt, d.h. es müssen max. drei Sätze gespielt werden.

a) Bilden Sie das zugehörige Baumdiagramm mit den Wahrscheinlichkeiten.

Lösung:



b) Beschreiben Sie die Ergebnismenge mit F (Fritz gewinnt) und E (Emil gewinnt).

Lösung:

$$\Omega = \{FF; FEF; FEE; EFF; EFE; EE\}$$

c) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse

(i) A = „Fritz gewinnt“

(ii) B = „Emil gewinnt“.

Lösung:

$$P(A) = s \cdot s + s \cdot (1-s) \cdot s + (1-s) \cdot s \cdot s = s^2 + 2s^2 \cdot (1-s) = 3s^2 - 2s^3$$

$$P(B) = (1-s) \cdot (1-s) + (1-s) \cdot s \cdot (1-s) + s \cdot (1-s) \cdot (1-s) = (1-s)^2 + 2s \cdot (1-s)^2$$

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \left[s^2 + 2s^2 \cdot (1-s)\right] = 1 - 3s^2 + 2s^3$$

d) Beweisen Sie folgende wahre Behauptung: P(A) + P(B) = 1

Lösung:

$$P(A)+P(B)=\left(3s^2-2s^3\right)+\left(1-3s^2+2s^3\right)=1$$

e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Fritz, wenn er eine Spielstärke von 0,6 besitzt?

Lösung:

$$P(A)=3\cdot 0,6^2-2\cdot 0,6^3=0,648$$

f) Wo hat die Funktion p(s) = $s^2 + 2s^2(1 - s)$ mit $s \in [\,0\,;\,1\,]$

(i) ihre Extremwerte und

(ii) ihren Wendepunkt?

Lösung:

$$P(s)=s^2+2s^2\cdot(1-s)=3s^2-2s^3$$

$$Extremwert:$$

$$P'(s)=6s-6s^2\overset{!}{=}0 \quad\Rightarrow\quad s_1=0 \quad\wedge\quad s_2=1$$

$$P''(s)=6-12s$$

$$\Rightarrow \quad P''(0)=6>0 \quad\to\quad Min(0\mid 0)$$

$$\Rightarrow \quad P''(1)=-6<0 \quad\to\quad Max(1\mid 1)$$

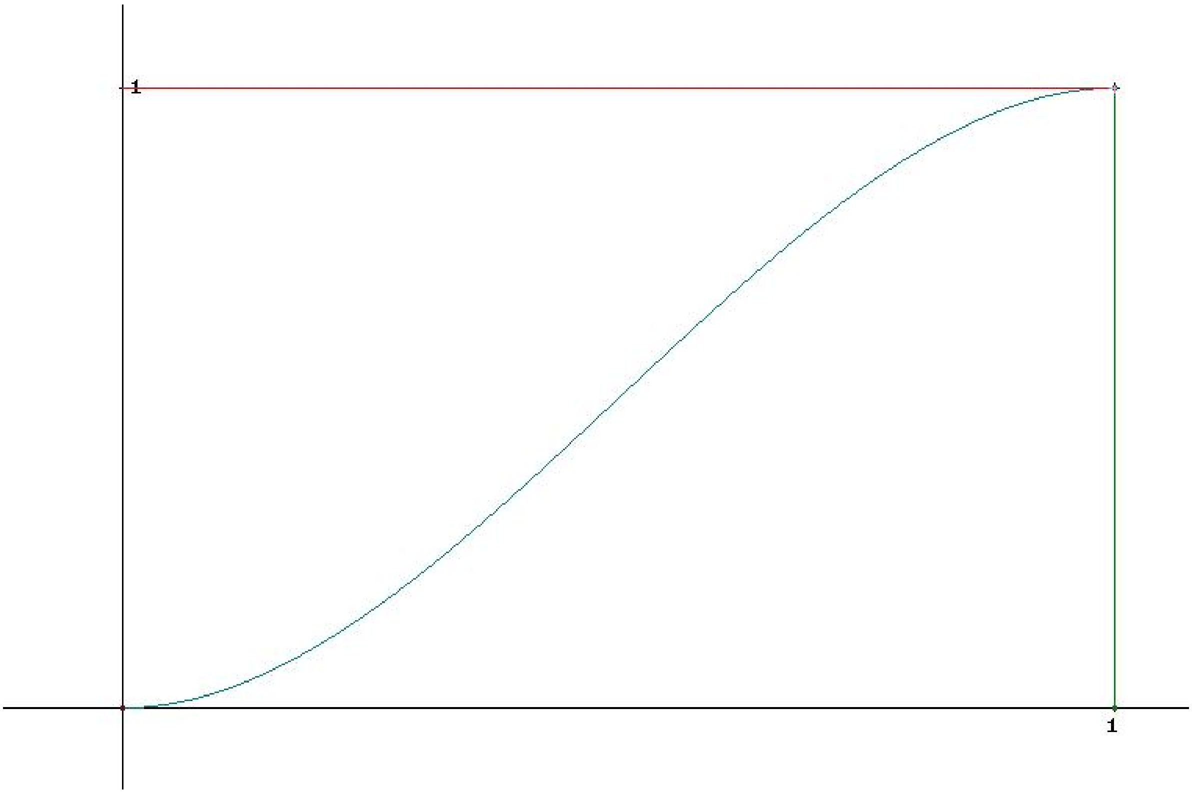
$$Wendepunkt:$$

$$P''(s)=6-12s\overset{!}{=}0 \quad\Rightarrow\quad s_1=\frac{1}{2}$$

$$P'''(s)=-12$$

$$\Rightarrow \quad P'''\left(\frac{1}{2}\right)=-12\neq 0 \quad\to\quad W\left(\frac{1}{2}\;\middle|\;\frac{1}{2}\right)$$

Grafische Darstellung der Funktion p(s)



g) Nun kommt noch Klein-Erna (Sie wissen - die mit den Permutationen ...!) hinzu. Fritz soll abwechselnd gegen Emil und Klein-Erna spielen.

Wenn er in drei Spielen zweimal hintereinander gewinnt, bekommt er von den beiden eine Riesenpizza spendiert.

In welcher Reihenfolge sollte er gegen seine beiden Gegner antreten, wenn er gegen Emil mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,7 und gegen Klein-Erna mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,6 verliert?

Lösung:

Spielreihenfolge 1: Emil - Klein-Erna - Emil

$$P\left("Sieg"\right) = 0,7 \cdot 0,4 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,4 = 0,204$$

Erklärung: Niederlage $\cdot$ Sieg $\cdot$ Sieg + Sieg $\cdot$ Sieg

Spielreihenfolge 2: Klein-Erna - Emil - Klein-Erna

$$P\left("Sieg"\right) = 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,3 = 0,192$$

Erklärung: Niederlage $\cdot$ Sieg $\cdot$ Sieg + Sieg $\cdot$ Sieg

Ergebnis: **Er sollte zuerst gegen Emil spielen und danach gegen Klein-Erna, da er im zweiten Match in jedem Fall gewinnen muss, um die Chance auf zwei Siege in Folge zu haben.**

2.) Kombinatorik: Geburtstagsproblem

Anhand einer Namensliste werden 5 Schüler ausgewählt.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben alle in verschiedenen Monaten Geburtstag, wenn die Monate als gleichwahrscheinlich angesehen werden?

Lösung:

$$P = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{12^5} = \frac{95.040}{248.832} = 0{,}382 \approx 38{,}2\ \%$$

3.) Bernoulliketten

Geben Sie für die folgenden Bernoulliketten jeweils die Länge n und den Parameter p an.

a) Eine ideale Münze wird sechsmal geworfen und die Anzahl der Wappen festgestellt.

b) In einer Bevölkerung sind 5 % Linkshänder. Es werden 100 Personen rein zufällig ausgewählt und die Anzahl der Linkshänder bestimmt.

Lösung:

Aufgabe	Länge	Parameter
a)	n = 6	p = 0,5
b)	n = 100	p = 0,05

4.) Bernoulliketten

Ein elektronisches Gerät ist aus 10 Elementen zusammengesetzt, die unabhängig voneinander mit der Wahrscheinlichkeit p arbeiten. Ist mindestens ein Element defekt, dann arbeitet das Gerät bereits nicht mehr.

Wie groß muss p mindestens sein, damit das Gerät mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von mehr als 90 % funktioniert?

Lösung:

$$Ansatz: \quad p^{10} \geq 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad p \geq \sqrt[10]{0{,}9} \quad \Rightarrow \quad p \geq 0{,}9895$$

5.) **Ereignisraum**

Auf einem Würfel sind auf je zwei gegenüberliegenden Seiten die Ziffern 1, 2 und 3 aufgetragen, wobei die gleichen Ziffern nicht unterscheidbar sind.

Der Würfel wird dreimal nacheinander geworfen.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten an:

A: „Es wird mindestens zweimal die 1 geworfen."

B: „Es wird höchstens zweimal die 1 geworfen."

C: „Es wird genau einmal die 1 geworfen."

D: „Die 1 wird nicht geworfen."

Lösung:

$$A)\quad B_{3;\frac{1}{3}}(X \geq 2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{7}{27} = 0,2593$$

$$B)\quad B_{3;\frac{1}{3}}(X \leq 2) = 1 - B_{3;\frac{1}{3}}(X = 3) = 1 - \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{26}{27} = 0,9630$$

$$C)\quad B_{3;\frac{1}{3}}(X = 1) = \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{12}{27} = 0,4444$$

$$D)\quad B_{3;\frac{1}{3}}(X = 0) = \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} = 0,2963$$

b) Formulieren Sie folgende Ereignisse in Worten:

(i) $A \cap B$ (ii) $A \cup C$

(iii) $\overline{A}$ (iv) $\overline{D}$

Lösung:

(i) $A \cap B$ **= „Die 1 wird zweimal geworfen."**

(ii) $A \cup C$ **= „Die 1 wird mindestens einmal geworfen."**

(iii) $\overline{A}$ **= „Die 1 wird höchstens einmal geworfen."**

(iv) $\overline{D}$ **= „Die 1 wird mindestens einmal geworfen."**

6.) Ereigniswahrscheinlichkeiten

Kantinenwirt Lecker bietet zwar jeden Tag mehrere Braten an, serviert aber zu jedem die gleiche Beilage, nämlich an 60 % der Tage Kartoffeln (k) und sonst Nudeln (n).

Fritz, der Tischtennisspieler von Aufgabe 1, isst an **fünf aufeinanderfolgenden** Tagen in der Kantine. Die Kollegen spötteln schon nach einem berühmten Kleist-Zitat: „Der Fitz geht solang zur Kantine bis er ...“ - na ja lassen wir das.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält er als Beilage

a) die Reihenfolge **k n k n k** ?

b) nur am ersten Tag keine Kartoffeln?

c) nur an einem Tag keine Kartoffeln ?

d) mindestens an einem Tag keine Kartoffeln?

Lösung:

$$a)\quad P(\text{"}knknk\text{"}) = 0,6^3 \cdot 0,4^2 = 0,03456$$

$$b)\quad P(\text{"nur am ersten Tag keine Kartoffeln"}) = 0,4^1 \cdot 0,6^4 = 0{,}05184$$

$$c)\quad P(\text{"nur an einem Tag keine Kartoffeln"}) = \binom{5}{1} \cdot 0,4^1 \cdot 0,6^4 = 0,2592$$

$$d)\quad P(\text{"mind. an einem Tag keine Kartoffeln"}) =$$

$$1 - P(\text{" jeden Tag Kartoffeln"}) = 1 - \binom{5}{5} \cdot 0,6^5 \cdot 0,4^0 = 0,92224$$

7.) Fakultäten

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

a) $\frac{8!}{5!}$ b) $\frac{102!}{100!}$ c) $\frac{(n+1)!}{(n-2)!}$

d) Zeigen Sie die Richtigkeit folgender Behauptung:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

Lösung:

$$a)\quad \frac{8!}{5!}=8\cdot 7\cdot 6=336$$

$$b)\quad \frac{102!}{100!}=102\cdot 101=10.302$$

$$c)\quad \frac{(n+1)!}{(n-2)!}=(n+1)\cdot n\cdot (n-1)=n^3-n$$

$$d)\quad \frac{n}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1}=\frac{n}{k}\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot\left[(n-1)-(k-1)\right]!}$$

$$\xrightarrow[k\cdot(k-1)!=k!]{n\cdot(n-1)!=n!}\quad \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\binom{n}{k}$$

8.) Kombinatorik

Harry feiert eine Gartenparty. Er hat drei rote, vier blaue, fünf grüne und sechs violette Glühlampen. Diese möchte er in einer Reihe nebeneinander aufhängen.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn

a) die Glühlampen in einer beliebigen Reihenfolge angeordnet werden?

b) die gleichfarbigen beieinander bleiben sollen?

c) Lösen Sie bitte auch noch diese Aufgabe:

Wie viele Wörter lassen sich aus den Wörtern

(i) KINDER (ii) KOMMISSION

bilden?

Lösung:

$$a)\quad \frac{18!}{3!\cdot 4!\cdot 5!\cdot 6!}=514.594.080$$

$$b)\quad 4!=24$$

$$c)\quad (i)\quad 6!=720$$

$$c)\quad (ii)\quad \frac{10!}{1!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!}=226.800$$

9.) Kombinatorik

Eine Fast-Food-Kette wirbt für ihre Restaurants mit dem Slogan:
“Täglich mindestens 200 verschiedene Mittagsmenüs!“.

Thea besucht ein solches Restaurant und stellt fest, dass sie aus vier Vorspeisen und neun Hauptgerichten auswählen kann.

Wie viele verschiedene Nachspeisen müssen mindestens bereit stehen?

Lösung:

$$4 \cdot 9 \cdot x \geq 200 \quad \xrightarrow{:36} \quad x \geq \frac{200}{36} \quad \Rightarrow \quad x \geq 6$$

$$Bed.: x \in N$$

10.) Kombinatorik

Ein Vereinssausschuss soll vier Männer und drei Frauen umfassen, wobei die Auswahl aus 12 männlichen und 6 weiblichen Mitgliedern erfolgen soll.

a) Wie viele verschiedene Ausschusszusammensetzungen sind möglich?

b) Wie groß wäre die Wahrscheinlichkeit, dass genau diese geschlechterspezifische Aufteilung entsteht, wenn 7 aus 18 gewählt würden?

Lösung:

$$a) \quad \binom{12}{4} \cdot \binom{6}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 9.900$$

$$b) \quad P = \frac{9.900}{\binom{18}{7}} = \frac{9.900}{\frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}} = \frac{3.360}{31.824}$$

$$= 0{,}31108 = 31{,}108\ \%$$

11.) Wahrscheinlichkeiten

Ein Tetraeder zeigt die Augenzahlen von 1 bis 4 mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten.

Es gilt: $P(\{1;2\}) = \frac{3}{8}$ $\quad P(\{2;3\}) = \frac{1}{2}$ $\quad P(\{1;2;4\}) = \frac{3}{4}$

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Augenzahlen.

Lösung:

1.) $P(\{4\}) = P(\{1;2;4\}) - P(\{1;2\}) = \frac{3}{4} - \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$

2.) $P(\{2\}) = P(\{1;2;4\}) + P(\{2;3\}) - 1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{4}$

3.) $P(\{1\}) = P(\{1;2\}) - P(\{2\}) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

4.) $P(\{3\}) = P(2;3) - P(\{2\}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

Probe:

X	**1**	**2**	**3**	**4**
$P(X)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$
$\sum_{X=1}^{4} P(X)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{8}{8} = 1$

13.) Zufallszahlen

a) Erzeugen Sie mit Hilfe des folgenden Bildungsgesetzes fünf Zufallszahlen:
Startwert: $x_0 = 2$
$x_{n+1} = \text{mod}\ [(4x + 7) ; 5]$

Lösung:

Schritt	x_n	Rechnung	x_{n+1}
1	2	mod [(4*2 + 7) ; 5]	0
2	0	mod [(4*0 + 7) ; 5]	2
3	2	mod [(4*2 + 7) ; 5]	0
4	0	mod [(4*0 + 7) ; 5]	2
5	2	mod [(4*2 + 7) ; 5]	0

b) Welche Ziffern kann dieser Zufallszahlengenerator maximal erzeugen, wenn man den Rechenalgorithmus 4*x+7 verändern würde? Bitte mit Begründung!

Lösung: **Die Zahlen 0 und 2, bei Änderung des Rechenalgorithmus aber dann maximal die Zahlenwerte von 0 bis 4, da mit Modulo 5 gerechnet wird.**

c) Welche berühmte Familie machte sich um die Bildung von Zufallszahlen einen Namen

Lösung: Lehmer

12.) Relative Häufigkeit

80 Schüler einer Oberstufe werden nach ihrer Teilnahme am Wahlunterricht Englisch (E), Französisch (F) oder Spanisch (S) befragt. Man erhält folgende Angaben:

24 Schüler besuchen Französisch, 45 Englisch und 20 Spanisch, wobei 10 Schüler an drei Wahlkursen teilnehmen. Einer lernt nur spanisch und französisch, die reine Kombination

Englisch/Französisch gibt es fünfmal. Ein Schüler lernt nur Spanisch.

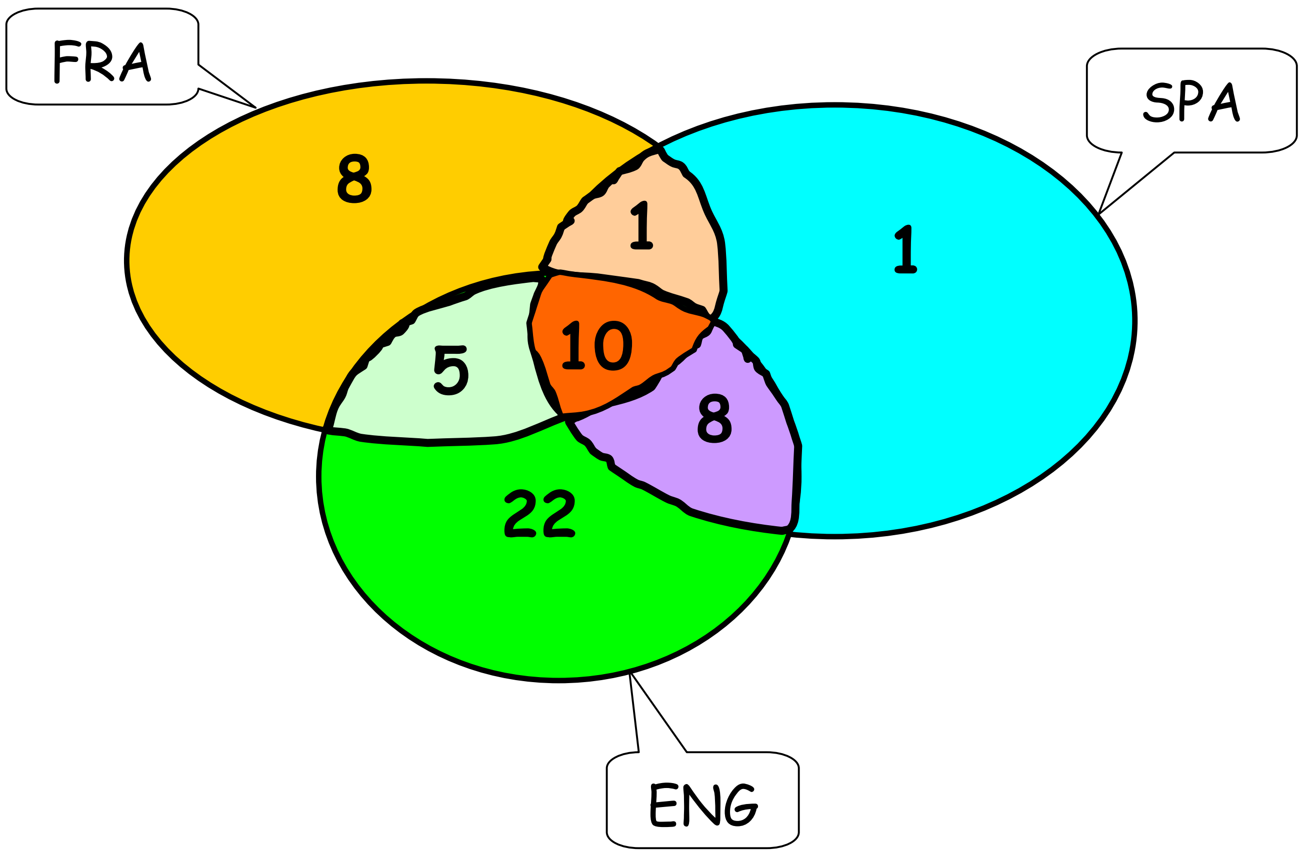
Wie groß ist die relative Häufigkeit der Schüler, die

a) an Französisch
b) nur an Französisch
c) an Englisch und Spanisch
d) nur an Englisch
e) nur an Englisch und Spanisch

teilnehmen?

Wie viele Schüler belegen keinen der Sprachkurse?

Lösung:



$$a)\quad h_r(\text{"Französisch"}) = \frac{24}{80} = \frac{3}{10}$$

$$b)\quad h_r(\text{"nur Französisch"}) = \frac{8}{80} = \frac{1}{10}$$

$$c)\quad h_r(\text{"Englisch und Spanisch"}) = \frac{18}{80}$$

$$d)\quad h_r(\text{"nur Englisch"}) = \frac{22}{80}$$

$$e)\quad h_r(\text{"nur Englisch und Spanisch"}) = \frac{8}{80}$$

Daher belegen 80 – 55 = 25 Schüler keinen der drei angebotenen Sprachkurse.