**Musterlösung** **13. Jgst.** **3. Kursarbeit** **Datum: 25.04.2006**

**Klasse: GY 03 c** **Fach: Mathematik (Leistungskurs)**

**Themen:** **alle behandelten Themengebiete**

## Thema 1: Analysis (nicht-rationale Funktionen)

Für $t \in \Re_+$ sei die Funktionenschar $f_t$ gegeben durch $f_t(x) = \frac{(x^2-t)}{e^x}$.

❶ Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion.

***Lösung:*** $D = \Re$ weil gilt: $e^x \neq 0$

❷ Zeigen Sie, dass die Ableitungen folgende Form annehmen:

$$f_t'(x) = \frac{2x - x^2 + t}{e^x} \qquad f_t''(x) = \frac{x^2 - 4x + 2 - t}{e^x}$$

***Lösung:***

$$f_t'(x) = \frac{2x \cdot e^x - (x^2 - t) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{-x^2 + 2x + t}{e^x}$$

$$f_t''(x) = \frac{(-2x+2)e^x - \left(-x^2 + 2x + t\right)e^x}{e^{2x}} = \frac{x^2 - 4x + 2 - t}{e^x}$$

❸ a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion und die Schnittstelle mit der y-Achse.

***Lösung:***

Nullstellen: $f_t(x) = \frac{(x^2-t)}{e^x} = 0 \Rightarrow x^2 - t = 0 \Rightarrow |x| = \sqrt{t}$

$S_y$: $f_t(0) = \frac{(0-t)}{e^0} = (-t) \Rightarrow (0 \mid -t)$

b) Ermitteln Sie die **Stellen**, an denen Extrema vorliegen. (*Notwendige Bedingung genügt.*)

***Lösung:*** $f_t'(x) = \frac{-x^2 + 2x + t}{e^x} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1+t}$

c) Berechnen Sie die Extremwerte für t = 3.

(*Nun auch die hinreichende Bedingung prüfen, damit die Art der Extrema bestimmt werden kann.*)

**Lösung:**

$$f_3'(x) \;\Rightarrow\; x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1+3} \;\Rightarrow\; x_1 = 3 \;\wedge\; x_2 = -1$$

$$\textit{hinreichende Bedingung}:$$

$$f_3''(3) = \frac{-4}{e^3} < 0 \;\Rightarrow\; Max\left(3 \;\middle|\; \frac{6}{e^3}\right)$$

$$f_3''(-1) = \frac{4}{e^{-1}} > 0 \;\Rightarrow\; Min\left(-1 \mid -2e\right)$$

d) Wer Extrema bestimmen kann, weiß auch wie Wendepunkte zu bestimmen sind: Berechnen Sie nun die **Stellen**, an denen Wendepunkte vorliegen.

(*Notwendige Bedingung genügt.*)

**Lösung:** $$f_t''(x) = \frac{x^2 - 4x + 2 - t}{e^x} \overset{!}{=} 0 \;\Rightarrow\; x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{2+t}$$

e) Wie lauten für t = 2 die Wendepunkte?

**Lösung:**

$$f_2''(x) \;\Rightarrow\; x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{2+2} \;\Rightarrow\; x_1 = 4 \;\wedge\; x_2 = 0$$

$$\Rightarrow\; W_1\left(4 \;\middle|\; \frac{14}{e^4}\right) \;\wedge\; W_2\left(0 \mid -2\right)$$

f) Berechnen Sie für t = 2 und x = 0 die zugehörige Tangente.

**Lösung:**

$$\text{Wendetangente in } W_2\left(0 \mid -2\right):$$

$$f_2'(0) = 2 \xrightarrow{\textit{Ermittlung b}} -2 = 2 \cdot 0 + b \;\Rightarrow\; b = (-2)$$

$$\Rightarrow\; t(x) = 2x - 2$$

g) Wie verhält sich die Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs?

**Lösung:**

$$\lim_{x \to \infty} f_t(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{(x^2 - t)}{e^x} \overset{L'Hospital}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} \overset{L'Hospital}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} \to 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f_t(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{(x^2 - t)}{e^x} = \lim_{x \to \infty} (x^2 - t) \cdot e^x = "\infty \cdot \infty" \to \infty$$

h) Beweisen Sie mit Hilfe der ***Integralrechnung***, dass

$$F_t(x) = -\frac{x^2 + 2x - t + 2}{e^x}$$

eine Stammfunktion zu $f_t(x)$ darstellt.

**Lösung:**

$$\int f_t(x)dx = \int \frac{(x^2 - t)}{e^x} dx = \int (x^2 - t) \cdot e^{-x} dx$$

*Substitution I:*

$$u(x) = x^2 - t \qquad v(x) = -e^{-x}$$
$$u'(x) = 2x \qquad v'(x) = e^{-x}$$

$$(1) \quad \int (x^2 - t) \cdot e^{-x} dx = -e^{-x} \cdot \left(x^2 - t\right) + \int 2x \cdot e^{-x} dx$$

*Substitution II:*

$$u(x) = 2x \qquad v(x) = -e^{-x}$$
$$u'(x) = 2 \qquad v'(x) = e^{-x}$$

$$\int 2x \cdot e^{-x} dx = -2x \cdot e^{-x} + 2\int e^{-x} dx \xrightarrow{Stammfkt.} \int 2x \cdot e^{-x} dx = -2x \cdot e^{-x} - 2e^{-x}$$

*eingesetzt in* $(1)$:

$$\int (x^2 - t) \cdot e^{-x} dx = -e^{-x} \cdot \left(x^2 - t\right) - 2x \cdot e^{-x} - 2e^{-x}$$

$$\int (x^2 - t) \cdot e^{-x} dx = -\frac{x^2 + 2x + 2 - t}{e^x}$$

❹ Beweisen Sie folgende Behauptung:

Für $t_1 \neq t_2$ besitzen die Kurvenscharen keinen gemeinsamen Punkt.

***Lösung:***

$$f_{t_1}(x) = \frac{(x^2 - t_1)}{e^x} \wedge f_{t_2}(x) = \frac{(x^2 - t_2)}{e^x}$$

$$\frac{(x^2 - t_1)}{e^x} = \frac{(x^2 - t_2)}{e^x} \xrightarrow{\cdot e^x} x^2 - t_1 = x^2 - t_2$$

$$\xrightarrow{-x^2} -t_1 = -t_2 \Rightarrow Widerspruch$$

❺ Prüfen Sie, ob für t = 4 die Fläche der Funktion mit der x-Achse im Intervall [2 ; ∞[ bestimmt ist und ermitteln Sie die Fläche.

***Lösung:***

$$\lim_{u \to \infty} \int_2^u f_4(x)\,dx = \lim_{u \to \infty} F_4(u) - F_4(2) = -\lim_{u \to \infty} \frac{u^2 + 2u - 2}{e^u} + \frac{4 + 4 - 2}{e^2} = 0 + \frac{6}{e^2} = \frac{6}{e^2}$$

## Thema 2: Analysis (ganzrationale Funktionen)

Gegeben sei folgende Funktion: $g_k(x) = -\frac{1}{4k}x^3 + \frac{3}{4}kx \qquad k \in \Re$

❶ Zeigen Sie, dass die Ortskurve der Maxima durch $y_{\max} = \frac{1}{2}x^2$ festgelegt ist.

***Lösung:***

$$g_k'(x) = -\frac{3}{4k}x^2 + \frac{3}{4}k \overset{!}{=} 0 \Rightarrow |x| = k$$

$$g_k''(x) = -\frac{3}{2k}x \Rightarrow g_k''(k) = -\frac{3}{2} < 0$$

$$g_k(k) = -\frac{1}{4k}k^3 + \frac{3}{4}k \cdot k = \frac{1}{2}k^2$$

$$\Rightarrow Max\left(k \;\middle|\; \frac{1}{2}k^2\right)$$

$$\Rightarrow Ortskurve: \; o(x) = \frac{1}{2}x^2$$

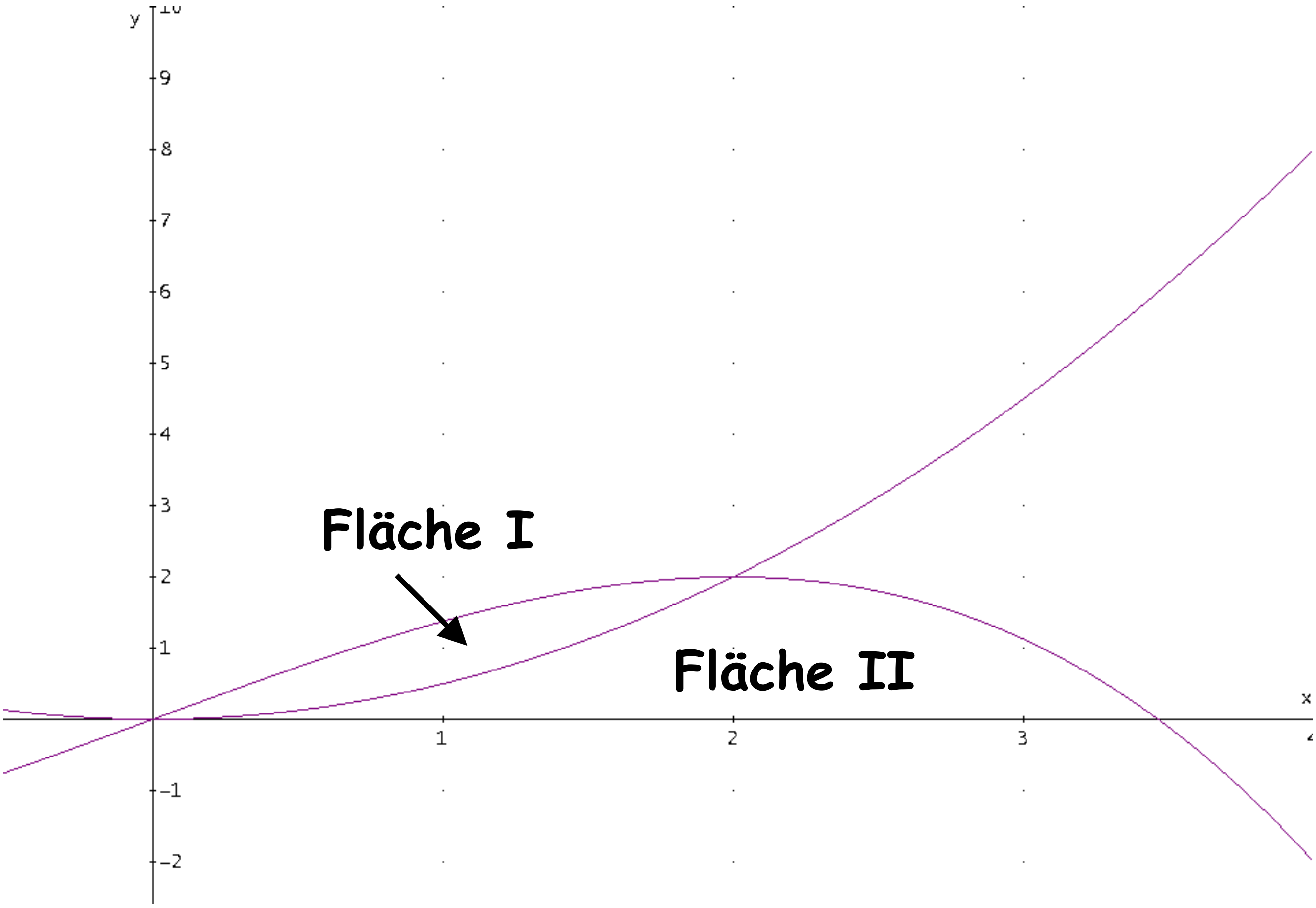
❷ Die Parabel mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x^2$ zerlegt für k > 0 die vom Graphen von $g_k(x)$ und der x-Achse im 1. Quadranten eingeschlossenen Fläche in zwei Teilflächen

a) Bestimmen Sie die Größe der beiden Teilflächen.

b) Zeigen Sie, dass das Verhältnis der beiden Teilflächen unabhängig von k ist und ermitteln Sie das Flächenverhältnis.

Anmerkung: Benutzen Sie zur Bearbeitung der Teilaufgaben die nachfolgende Anlage; hier wurde mit dem Parameterwert k = 2 gearbeitet.

Anlage zu ❷




***Lösung:***

Fläche I: Schnittpunkte und Fläche

$$\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{4k}x^3 + \frac{3}{4}kx \Rightarrow -\frac{1}{4}x\left(\frac{1}{k}x^2 + 2x - 3k\right) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = k \wedge x_3 = -3k$$

$$\Rightarrow \int_0^k \left(-\frac{1}{4k}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}kx\right)dx = \left[-\frac{1}{16k}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{8}kx^2\right]_0^k = \frac{7}{48}k^3$$

Fläche II: Schnittpunkte mit x-Achse und Fläche

$$-\frac{1}{4k}x^3+\frac{3}{4}kx = 0 \Rightarrow -\frac{1}{4}x\left(\frac{1}{k}x^2-3k\right) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = \sqrt{3}\cdot k \wedge x_3 = -\sqrt{3}\cdot k$$

$$\Rightarrow \int_0^{\sqrt{3}\cdot k}\left(-\frac{1}{4k}x^3+\frac{3}{4}kx\right)dx = \left[-\frac{1}{16k}x^4+\frac{3}{8}kx^2\right]_0^{\sqrt{3}\cdot k} = \frac{9}{16}k^3$$

$$\Rightarrow \frac{9}{16}k^3-\frac{7}{48}k^3 = \frac{27-7}{48}k^3 = \frac{20}{48}k^3 = \frac{5}{12}k^3$$

*Flächenverhältnis:*

$$\frac{20}{48}k^3:\frac{7}{48}k^3 = 20:7$$

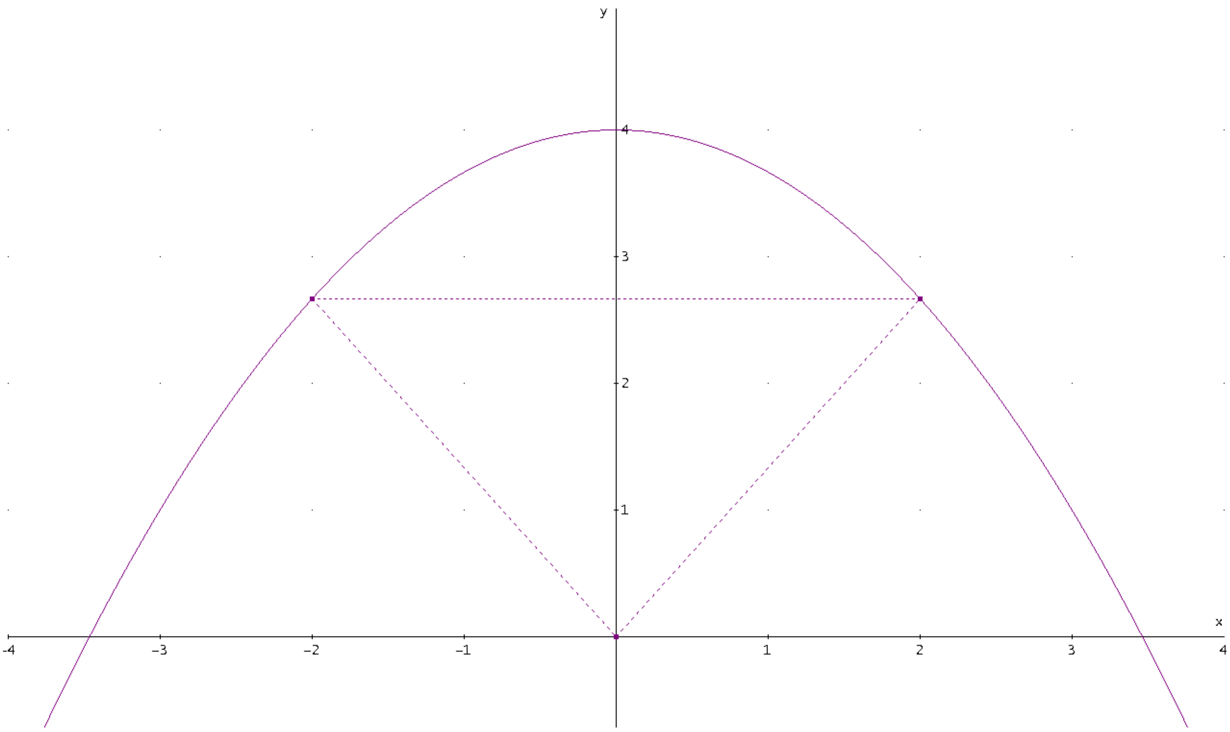
Gegeben sei nun folgende parameterfreie Funktion: $h(x) = -\frac{1}{3}x^2+4$

❸ Beschreiben Sie dieser Fläche ein zur Ordinate symmetrisches gleichschenkliges Dreieck mit maximalem Inhalt ein, dessen Spitze im Ursprung liegt.

Bitte mit Zeichnung!

Ermitteln Sie die Maße (Grundlinie, Höhe und Fläche) des maximalen Dreiecks.

***Lösung:***



$$A_\Delta(g,h) = \frac{1}{2} g \cdot h$$

$$A_\Delta(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot f(x) = x \cdot \left( -\frac{1}{3} x^2 + 4 \right) = -\frac{1}{3} x^3 + 4x$$

$$A_\Delta{}'(x) = -x^2 + 4 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow |x| = 2$$

$$A_\Delta{}''(x) = -2x \Rightarrow A_\Delta{}''(2) = -4 < 0$$

$$\Rightarrow g = 4; h = \frac{8}{3} \text{ und } A_\Delta\left(4, \frac{8}{3}\right) = \frac{16}{3}$$

Abschließend verändern wir die Funktion nun geringfügig zu

$$r(x) = -x^2 + 4$$

❹ Wie groß ist das Volumen, wenn die Funktion r(x) um die Abszisse rotierte?

***Lösung:***

$$-x^2 + 4 = 0 \Rightarrow |x| = 2$$

$$V(x) = \pi \cdot \int_{-2}^{2} [r(x)]^2 \, dx = 2\pi \cdot \int_{0}^{2} \left[ -x^2 + 4 \right]^2 dx$$

$$V(x) = 2\pi \cdot \int_{0}^{2} \left[ x^4 - 8x^2 + 16 \right] dx = 2\pi \cdot \left[ \frac{1}{5} x^5 - \frac{8}{3} x^3 + 16x \right]_0^2$$

$$V(x) = \frac{512}{15} \cdot \pi = 34{,}133\,\pi$$

## Thema 3: Lineare Algebra I

❶ Im Vektorraum $R^3$ sind folgende Vektoren gegeben:

$$\vec{a}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ -k \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{b}_k = \begin{pmatrix} k-4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{c}_k = \begin{pmatrix} 2k \\ -k \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } k \in \Re$$

a) Stellen Sie $\vec{a}_1$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{b}_1$ und $\vec{c}_1$ dar.

***Lösung:***

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{für } k = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 1 &= -3r + 2s \\ -1 &= 2r - s \\ -1 &= s \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad r = (-1)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}_1 = -\vec{b}_1 - \vec{c}_1$$

b) Für welche Werte von k sind die drei Vektoren linear unabhängig?

***Lösung:***

$$\begin{vmatrix} 1 & k-4 & 2k \\ -k & 2 & -k \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2k^2 - 4k + 2 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow k = 1$$

$$\left\{\vec{a}_k ; \vec{b}_k ; \vec{c}_k\right\} \text{ linear unabhängig} \quad \Leftrightarrow \quad k \in \Re \setminus \{1\}$$

c) Für welchen Wert von k kann der Vektor $\vec{d}_k = \begin{pmatrix} 2-k \\ 0 \\ k-1 \end{pmatrix}$ mittels der obigen drei Vektoren dargestellt werden?

Geben Sie dann auch die allgemeine Lösung des LGS an.

***Lösung:***

$k = 1:$

$$\begin{array}{lrrr|r} I.) & 1 & -3 & 2 & 1 \\ II.) & -1 & 2 & -1 & 0 \\ III.) & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \xrightarrow[III.)+I.)]{II.)+I.)}$$

$$\begin{array}{lrrr|r} I.) & 1 & -3 & 2 & 1 \\ II.) & 0 & -1 & 1 & 0 \\ III.) & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \xrightarrow[I.)-3\cdot II.)]{III.)-II.)}$$

$$\begin{array}{lrrr|r} I.) & 1 & 0 & -1 & 1 \\ II.) & 0 & -1 & 1 & 0 \\ III.) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{lcl} x & = & 1+z \\ y & = & z \end{array}$$

Die Vektoren $\vec{a}_k; \vec{b}_k; \vec{c}_k$ seien die Spaltenvektoren der Matrix $A_k$ mit $k \in \Re$.

d) Bilden Sie daraus folgende Matrizen: $(A_0)^2$ und $(A_0)^{-1}$

***Lösung:***

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_0^2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -12 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ccc} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{\text{III.)+I.)}}$$

$$\left.\begin{array}{ccc} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow[\text{III.)+2II.)}]{\text{I.)+2II.)}}$$

$$\left.\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot\text{II.)}}$$

$$\left.\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \Rightarrow \quad A_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

e) Bestimmen Sie die Lösung zur folgender Matrizengleichung:

$$\left[\left(A_0 - 2X\right)^T \cdot A_k\right]^T = A_k^{\ T} \cdot \left(A_0 + X\right) - 2A_k^{\ T}$$

***Lösung:***

$$\left[\left(A_0 - 2X\right)^T \cdot A_k\right]^T = A_k^{\ T} \cdot \left(A_0 + X\right) - 2A_k^{\ T}$$

Umformungen: linke Seite: Klammer auflösen; rechte Seite: $A_k^{\ T}$ ausklammern $\Rightarrow$

$$A_k^{\ T} \cdot \left(A_0 - 2X\right) = A_k^{\ T} \cdot \left(A_0 + X - 2E\right)$$

Umformungen: beide Seiten: Multiplikation mit $\left(A_k^{\ T}\right)^{-1}$ $\Rightarrow$

$$A_0 - 2X = A_0 + X - 2E$$

Umformungen: beide Seiten: Subtraktion von $A_0$ und X $\Rightarrow$

$$X = \frac{2}{3}E$$

## Thema 4: Lineare Algebra II

Die Unternehmung Armes Brot AG verarbeitet die Materialien $M_1$, $M_2$ und $M_3$ zu den Zwischenprodukten $Z_1$, $Z_2$ und $Z_3$ und diese Zwischenprodukte zu den Endprodukten $E_1$, $E_2$ und $E_3$ .

Die folgenden Matrizen stellen die Stücklisten bzw. Materialverflechtungen dar.

$$M_{MZ} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad M_{ZE} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Wie viele Materialien werden pro Endprodukt gebraucht?

***Zusatzauftrag:*** Zeigen Sie, dass die Zeilensummen der Ergebnismatrix dem Vektor (44 48 29) entsprechen.

***Lösung:***

$$M_{MZ} \cdot M_{ZE} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 14 & 18 \\ 14 & 14 & 20 \\ 8 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

b) Die Firma erhält einen Auftrag vom Umfang (10 25 20).

Der Vorrat an **Zwischenprodukten** beträgt (200 100 85).

Prüfen Sie, ob der vorhandene Bestand genügt bzw. ob nachbestellt werden muss.

***Lösung:***

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 175 \\ 100 \\ 85 \end{pmatrix}$$

c) Der Vorrat an **Zwischenprodukten** beträgt nun (130 70 60).

Unser Chef Rudi Nutzlos will nun wissen, wie viele Endprodukte wir herstellen können, wenn wir unser Zwischenproduktlager komplett leeren würden.

**Lösung:**

$$\begin{array}{lccc|c} I.) & 2 & 3 & 4 & 130 \\ II.) & 1 & 2 & 2 & 70 \\ III.) & 2 & 1 & 2 & 60 \end{array} \xrightarrow{I.)-II.)}$$

$$\begin{array}{lccc|c} I.) & 1 & 1 & 2 & 60 \\ II.) & 1 & 2 & 2 & 70 \\ III.) & 2 & 1 & 2 & 60 \end{array} \xrightarrow[III.)-2\cdot I.)]{II.)-I.)}$$

$$\begin{array}{lccc|c} I.) & 1 & 1 & 2 & 60 \\ II.) & 0 & 1 & 0 & 10 \\ III.) & 0 & -1 & -2 & -60 \end{array} \xrightarrow[III.)+II.)]{I.)-II.)}$$

$$\begin{array}{lccc|c} I.) & 1 & 0 & 2 & 50 \\ II.) & 0 & 1 & 0 & 10 \\ III.) & 0 & 0 & -2 & -50 \end{array} \xrightarrow[-\frac{1}{2}\cdot III.)]{I.)+III.)}$$

$$\begin{array}{lccc|c} I.) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ II.) & 0 & 1 & 0 & 10 \\ III.) & 0 & 0 & 1 & 25 \end{array} \quad \Rightarrow \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 25 \end{pmatrix}$$

Die Kosten bzw. Verkaufpreise seien durch folgende Vektoren gegeben:

Kosten Materialien: $\vec{k_M} = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 20 \end{bmatrix}$

Kosten Zwischenproduktproduktion: $\vec{k_Z} = \begin{bmatrix} 80 & 100 & 120 \end{bmatrix}$

Kosten Endproduktmontage: $\vec{k_E} = \begin{bmatrix} 410 & 510 & 620 \end{bmatrix}$

Verkaufspreise: $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1.500 & 2.000 & 2.500 \end{bmatrix}$

d) Berechnen Sie die **Material**gesamtkosten für jedes einzelne Endprodukt.

***Lösung:***

$$\begin{bmatrix} 10 & 15 & 20 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 14 & 18 \\ 14 & 14 & 20 \\ 8 & 9 & 12 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 490 & 530 & 720 \end{bmatrix}$$

e) Berechnen Sie die Gesamtkosten für jedes einzelne Endprodukt.

***Lösung:***

$$Zwischenproduktproduktion:$$

$$\begin{bmatrix} 80 & 100 & 120 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 500 & 560 & 760 \end{bmatrix}$$

$$\text{variableGesamtkosten:}$$

$$\begin{aligned} \text{vGK} &= \begin{bmatrix} 490 & 530 & 720 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 500 & 560 & 760 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 410 & 510 & 620 \end{bmatrix} \\ \text{vGK} &= \begin{bmatrix} 1.400 & 1.600 & 2.100 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

f) Wie hoch ist der Deckungsbeitrag für jedes einzelne Endprodukt.

***Lösung:***

$$\begin{aligned} DB &= Ertrag - vGK \\ DB &= \begin{bmatrix} 1.500 & 2.000 & 2.500 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.400 & 1.600 & 2.100 \end{bmatrix} \\ DB &= \begin{bmatrix} 100 & 400 & 400 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

g) Der Betrieb erhält einen Auftrag über (130 175 150).
Die Fixkosten betragen 123.000,00 €.

Wie hoch ist der Gewinn?

***Lösung:***

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 100 \\ 400 \\ 400 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 130 \\ 175 \\ 150 \end{pmatrix} - 123.000 = 143.000 - 123.000 = 20.000$$

h) Die Unternehmung hatte Endprodukte im Mengenverhältnis 3 : 2 : 1 gefertigt und dabei 1.350 ME von M3 verarbeitet.

Wie viele ME der anderen beiden Materialien wurden benötigt?

***Lösung:***

$$\begin{pmatrix} 12 & 14 & 18 \\ 14 & 14 & 20 \\ 8 & 9 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3x \\ 2x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82x \\ 90x \\ 54x \end{pmatrix} \Rightarrow 54x = 1.350 \Rightarrow x = 25$$

$$\Rightarrow M_2 = 90 \cdot 25 = 2.250 \Rightarrow E_2 = 2 \cdot 25 = 50$$

$$\Rightarrow M_1 = 82 \cdot 25 = 2.050 \Rightarrow E_1 = 3 \cdot 25 = 75$$

## Thema 5: Stochastik

### ❶ Flugplatzdisposition

Eine Fluggesellschaft weiß aus Erfahrung, dass etwa 20 % aller Fluggäste, die einen Platz für einen bestimmten Flug reservieren lassen, nicht zum Abflug erscheinen.

Sie verkauft deshalb 400 Flugscheine für 360 verfügbare Plätze.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle zum Abflug erscheinenden Fluggäste einen Platz bekommen?

***Lösung:***

$$p = 0,8$$

$$\Rightarrow \mu = 400 \cdot 0,8 = 320$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = 320 \cdot 0,2 = 64$$

$$x = \frac{360 - 320}{8} = 5$$

$$P(X \leq 360) = \Phi(5) = 1$$

### ❷ Autoradios

Autoradios haben eine mittlere Lebensdauer von 50.000 Betriebsstunden mit einer Standardabweichung von 10.000 Stunden.

Die Radios werden bei der Unternehmung Knödel-Phon in vier Produktionshallen hergestellt, wobei 30% in Halle 1, 20 % in Halle 2, 15 % in Halle 3 und der Rest in Halle 4 produziert werden.

Dabei werden auch Mängelprodukte erzeugt. 4 %, 5 %, 2 % und 7 % entsprechend der Hallenreihenfolge.

Insgesamt werden 10.000 Radios am Tag hergestellt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, ein mangelhaftes Radio zu produzieren?

***Lösung:***

$$P(\text{"Fehler"}) = 0{,}3\cdot 0{,}04+0{,}2\cdot 0{,}05+0{,}15\cdot 0{,}02+0{,}35\cdot 0{,}07 = 0{,}0495$$

b) Wie viele einwandfreie Radios werden in einer Woche hergestellt, wenn man von 5 Arbeitstagen ausgeht.

***Lösung:***

$$Menge(\text{"}einwandfrei\text{"}) = 0{,}9505\cdot 5\cdot 10.000 = 47.525\left[\text{"}Radios\text{"}\right]$$

c) Bei Produkttests wurde ein mangelhaftes Radio gefunden.
Wie wahrscheinlich ist es, dass es in Halle 2 hergestellt wurde?

***Lösung:***

$$P(\text{"Halle 2"}) = \frac{0{,}2\cdot 0{,}05}{0{,}0495} = 0{,}202 \approx 20{,}2\,[\%]$$

d) Wie viel % der erzeugten Radios haben eine Lebensdauer von mindestens 70.000 Stunden?

***Lösung:***

$$\mu = 50.000 \quad ; \quad \sigma = 10.000$$

$$x = \frac{70.000-50.000}{10.000} = 2$$

$$P(X>70.000) = 1-\Phi(2) = 1-0{,}9772 = 0{,}0228 \approx 2{,}3\left[\text{"\%"}\right]$$

e) Bei wie viel % der Radios weicht die Lebensdauer um mehr als 15.000 Stunden vom erwarteten Mittelwert ab?

***Lösung:***

$$\mu = 50.000 \quad ; \quad \sigma = 10.000$$

$$1-P(35.000\le X\le 65.000) = 1-\left[\Phi(1{,}5)-\Phi(-1{,}5)\right] = 1-\left[2\Phi(1{,}5)-1\right]$$

$$x = \frac{65.000-50.000}{10.000} = 1{,}5$$

$$1-\left[2\Phi(1{,}5)-1\right] = 2-2\Phi(1{,}5) = 2-2\cdot 0{,}9332 = 0{,}1336 \approx 13{,}4\left[\text{"\%"}\right]$$

f) Auf wie viele Stunden muss durch Verbesserung der Radios die mittlere Lebensdauer erhöht werden, damit bei gleicher Standardabweichung mind. 85 % der Radios mind. 42.000 Stunden laufen?

***Lösung:***

$$\mu = ??? \quad ; \quad \sigma = 10.000$$

$$-1{,}04 = \frac{42.000-\mu}{10.000} \quad \Rightarrow \quad \mu = 52.400\left[\text{"}Stunden\text{"}\right]$$

❸ **Vierfeldertafel**

Gegeben sei die folgende Tabelle:

| | männl. | weibl. | |
|---|---|---|---|
| Raucher | 2 | ***6*** | ***8*** |
| Nichtraucher | ***9*** | 3 | ***12*** |
| | ***11*** | ***9*** | 20 |

a) Vervollständigen Sie die Tabelle unter der Voraussetzung, dass das Verhältnis von Rauchern zu Nichtrauchern 2 : 3 beträgt.

***Lösung:*** siehe Tabelle (blaue Werte)

b) Prüfen Sie das Ereignis (Raucher & weiblich) auf stochastische Unabhängigkeit.

***Lösung:***

$$P\left(R\cap\overline{M}\right) = \frac{6}{20}$$

$$P(R) = \frac{8}{20} \quad ; \quad P\left(\overline{M}\right) = \frac{9}{20} \quad \Rightarrow \quad P(R)\cdot P\left(\overline{M}\right) = \frac{8}{20}\cdot\frac{9}{20} = \frac{72}{400}$$

$$\Rightarrow \quad P\left(R\cap\overline{M}\right) \neq P(R)\cdot P\left(\overline{M}\right) \quad \Rightarrow \quad \text{stochastisch abhängig}$$

## ❹ Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Harry Knotenwurz benutzt auf seinem Schulweg regelmäßig die S-Bahn.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „pünktlich“ liegt bei 90 %.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt Harry innerhalb einer Woche höchstens einmal unpünktlich (eine Woche = fünf Schultage!)?

***Lösung:***

$$B(X \geq 4) = B(X = 4) + B(X = 5)$$

$$B(X \geq 4) = \binom{5}{4} 0,1^1 \cdot 0,9^4 + \binom{5}{5} 0,1^0 \cdot 0,9^5$$

$$B(X \geq 4) = 0,32805 + 0,59049 = 0,91854 = 91,85\,["\%"]$$

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kam er innerhalb der vergangenen 100 Schultage zwischen 90 und 95 Mal pünktlich?

***Lösung:***

$$B_{0,9}(90 \leq X \leq 95) = B(X \leq 95) - B(X \leq 89) \qquad [n = 100]$$

$$B_{0,9}(36 \leq X \leq 45) = (1 - 0,0237) - (1 - 0,5832)$$

$$B_{0,9}(36 \leq X \leq 45) = 0,5595 = 55,95\,["\%"]$$

c) Wie oft muss man mindestens zur Schule fahren, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mind. 99 % mind. einmal zu spät zu kommen?

***Lösung:***

$$B(X \geq 1) = 1 - B(X = 0) \geq 0,99$$

$$\Rightarrow \binom{n}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^n \leq 0,01$$

$$\xrightarrow{\ln} n \cdot \ln(0,9) \leq \ln(0,01)$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,9)} = 43,71$$

$$\Rightarrow n \geq 44$$

d) Wie oft darf man höchstens zur Schule fahren, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 55 % immer rechtzeitig kommt?

***Lösung:***

$$B(X=0) \quad > \quad 0,55$$

$$\Rightarrow \quad \binom{n}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^n \quad > \quad 0,55$$

$$\xrightarrow{\ln} \quad n \cdot \ln(0,9) \quad > \quad \ln(0,55)$$

$$\Rightarrow \quad n \quad < \quad \frac{\ln(0,55)}{\ln(0,9)} \quad = \quad 5,67$$

$$\Rightarrow \quad n \quad \leq \quad 5$$

e) Wie groß müsste bei 50 Schultagen die Wahrscheinlichkeit p des Ereignisses „pünktlich“ mind.
sein, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % immer rechtzeitig bei der Schule eintrifft?

***Lösung:***

$$B(X=50) \quad \geq \quad 0,95$$

$$\xrightarrow{\text{vereinfachen}} \quad \binom{50}{50} p^{50} \cdot (1-p)^0 \quad \geq \quad 0,95$$

$$\xrightarrow{\text{vereinfachen und } \sqrt[50]{\text{p}}} \quad p \quad \geq \quad \sqrt[50]{0,95} \quad \Rightarrow \quad p \quad \geq \quad 0,99897 \quad = \quad 99,897\,[\text{"\%"}]$$