Musterlösung: **12. Jgst.** **1. Test** **Datum: 05.10.2004**

Klasse: GY 03 c **Fach: Mathematik (Leistungskurs)**

Thema: **Steckbriefaufgaben, Extremwertberechnungen, Produkt- und Quotientenregel**

---

❶ **Funktionsbestimmung aufgrund vorgegebener Eigenschaften I**

Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades berührt die x-Achse im Ursprung und hat den Hochpunkt H (2/2).

Bestimmen Sie die Funktionsvorschrift.

Lösung:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$I.)\quad P(0/0) \quad \Rightarrow \quad d = 0$

$II.)$ in P berührt Funktion die x-Achse: $\Rightarrow \quad f'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$

$III.)\quad H(2/2) \quad \Rightarrow \quad 2 = 8a + 4b$

$IV.)$ Extremwert in H $\Rightarrow \quad f'(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 12a + 4b$

$$Lösung: \quad f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$$

❷ **Funktionsbestimmung aufgrund vorgegebener Eigenschaften II**

Eine punktsymmetrische Parabel 5. Ordnung hat in P (-1/1) eine Wendetangente mit der Steigung 3.

Bestimmen Sie die Funktionsvorschrift.

Lösung:

$$f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

$I.)\quad Punktsymmetrie \quad \Rightarrow \quad b = d = f = 0$

$$f(x) = ax^5 + cx^3 + ex$$
$$f'(x) = 5ax^4 + 3cx^2 + e$$
$$f''(x) = 20ax^3 + 6cx$$

$II.)\quad P(-1/1) \quad \Rightarrow \quad 1 = -a - c - e$

$II.)$ Wendepunkt in x = -1: $\Rightarrow \quad f''(-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = -20a - 6c$

$III.)$ m=3 in Wendepunkt bei x = -1 $\Rightarrow \quad f'(-1) = 3 \quad \Rightarrow \quad 3 = 5a + 3c + e$

$$Lösung: \quad f(x) = -\frac{3}{2}x^5 + 5x^3 - \frac{9}{2}x$$

❸ Extrema unter Nebenbedingungen I

Zerlegen Sie die Zahl 12 so in zwei Summanden, dass die Summe Ihrer Quadrate möglichst klein wird.

Lösung:

$$\textit{Zielfunktion}: \quad f(x,y) = x^2 + y^2 \rightarrow \min.$$

$$\textit{Nebenbed.}: \quad x + y = 12 \quad \Rightarrow \quad y = 12 - x$$

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$f(x) = x^2 + (12-x)^2$$

$$f'(x) = 2x - 2(12-x) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 6$$

$$\Rightarrow \quad y = 6$$

$$f''(x) = 2 + 2 > 0 \Rightarrow \quad \textit{Min.}$$

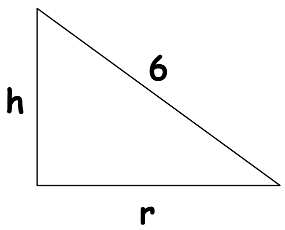
❹ Extrema unter Nebenbedingungen II

Welches rechtwinklige Dreieck mit der Hypotenuse c = 6 cm erzeugt einen Kegel größten Inhalts, wenn man es um eine Kathete dreht?

Lösung:

$$\textit{Zielfunktion}: \quad V(r,h) = \frac{1}{3} r^2 h \pi \rightarrow \max.$$

$$\textit{Nebenbed.}: \quad r^2 + h^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad r^2 = 36 - h^2$$

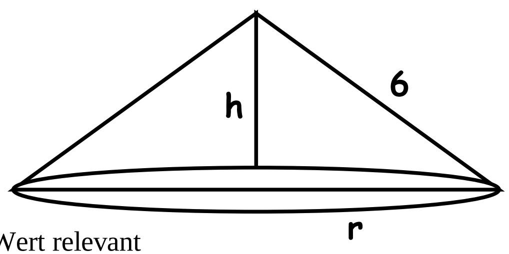


$$V(r,h) = \frac{1}{3} r^2 h \pi$$

$$V(h) = \frac{1}{3}\left(36 - h^2\right) h - h\pi$$

$$V'(h) = 12\pi - h^2\pi \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad |h| = \sqrt{12}$$



Anmerkung: nur positiver h-Wert relevant

$$\Rightarrow \quad r = \sqrt{24}$$

$$V''\left(\sqrt{12}\right) = -2\sqrt{12}\pi < 0 \Rightarrow \quad \textit{Max.}$$

❺ Bilden Sie die erste Ableitung folgender Funktionen:

a)

$$f(x) = \left(3x^2 + x\right)\left(\frac{1}{2}x^4 - 2x^2\right)$$

$$f'(x) = (6x+1)\left(\frac{1}{2}x^4 - 2x^2\right) + \left(3x^2 + x\right)\left(2x^3 - 4x\right)$$

b)

$$f(x) = g'(x)\,g(x)$$

$$f'(x) = g''(x)\,g(x) + \left[g'(x)\right]^2$$

c)

$$f(x) = \left(\frac{3x^2}{1-x} + x\right)^2 = \left(\frac{3x^2}{1-x} + x\right)\cdot\left(\frac{3x^2}{1-x} + x\right)$$

$$f'(x) = 2\cdot\left(\frac{6x(1-x) + 3x^2}{(1-x)^2} + 1\right)\cdot\left(\frac{3x^2}{1-x} + x\right)$$

d)

$$f(x) = \left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)$$

$$f(x) = 2\cdot\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\cdot\left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)$$