Musterlösung: **13. Jgst.** **1. Test** **Datum: 04.10.2005**

Klasse: GY 03 c **Fach: Mathematik (Leistungskurs)**

Thema: **Stochastik - Zufallsexperimente, Mengenoperationen und Kombinatorik**

---

❶ Relative Häufigkeit

125 Schüler einer Oberstufe werden nach ihrer Teilnahme am Wahlunterricht Französisch (F) oder Spanisch (S) befragt. Man erhält folgende Angaben:

30 Schüler besuchen Französisch und 20 Spanisch, wobei sechs Schüler an beiden Wahlkursen teilnehmen.

Wie groß ist die relative Häufigkeit der Schüler, die

a) an Französisch,
b) nur an Französisch,
c) nur an Spanisch,
d) an keinem der beiden Kurse teilnehmen?

Lösung:

$$a)\quad r\left(\text{"Französisch"}\right)=\frac{30}{125}=0,24$$

$$b)\quad r\left(\text{"nur Französisch"}\right)=\frac{24}{125}=0,192$$

$$c)\quad r\left(\text{"nur Spanisch"}\right)=\frac{14}{125}=0,112$$

$$d)\quad r\left(\text{"keine Sprache"}\right)=\frac{81}{125}=0,648$$

❷ Wahrscheinlichkeiten

Ein Würfel zeigt die Augenzahlen von 1 bis 6 mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten.

Es gilt:

$$P\left(\{1;2\}\right)=\frac{1}{4}\qquad P\left(\{3\}\right)=\frac{1}{3}\qquad P\left(\{1;4;6\}\right)=\frac{5}{12}$$

$$P\left(\{1;2;4\}\right)=\frac{1}{2}\qquad P\left(\{1;2;4;6\}\right)=\frac{7}{12}\qquad P\left(\{5;6\}\right)=\frac{1}{6}$$

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Augenzahlen.

Lösung:

1.) $P(\{3\}) = \frac{1}{3}$ *gegeben;*

2.) $P(\{4\}) = P(\{1;2;4\}) - P(\{1;2\}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

3.) $P(\{6\}) = P(\{1;2;4;6\}) - P(\{1;2;4\}) = \frac{7}{12} - \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

4.) $P(\{5\}) = P(\{5;6\}) - P(\{6\}) = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$

5.) $P(\{1\}) = P(\{1;4;6\}) - P(\{4\}) - P(\{6\}) = \frac{5}{12} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$

6.) $P(\{2\}) = P(\{1;2\}) - P(\{1\}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$

Probe:

X	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$P(X)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
$\sum_{X=1}^{6} P(X)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{12}{12} = 1$

❸ Wahrscheinlichkeiten

Bei der Produktion von elektronischen Artikeln ergibt sich eine hohe Ausschuss-Wahrscheinlichkeit von 20 %. Der Fertigung werden fünf Artikel ohne Zurücklegen rein zufällig entnommen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind

a) alle in Ordnung?
b) nur der erste und der letzte in Ordnung?
c) alle defekt?
d) mindestens einer defekt?
e) genau vier in Ordnung?

Lösung:

$a)\quad P(\text{"alle in Ordnung"}) = 0{,}8^5 = 0{,}32768 = 32{,}768\ \%$

$b)\quad P(\text{"1. und 5. in Ordnung"}) = 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}00512 = 0{,}512\ \%$

$c)\quad P(\text{"alle defekt"}) = 0{,}2^5 = 0{,}00032 = 0{,}032\ \%$

$d)\quad P(\text{"mind. 1 defekt"}) = 1 - P(\text{"alle in Ordnung"}) =$

$1 - 0{,}8^5 = 1 - 0{,}32768 = 0{,}67232 = 67{,}232\ \%$

$e)\quad P(\text{"genau 4 in Ordnung"}) = \binom{5}{4} \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2 =$

$5 \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2 = 0{,}4096 = 40{,}96\ \%$

❹ Wahrscheinlichkeiten

Ein Spielzeugartikel kann ausschließlich Farbfehler (FA) oder Formfehler (FO) aufweisen. Der Fehler FO tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 8 % auf, beide Fehler gleichzeitig mit einer von 2 %. Insgesamt gibt es 12 % fehlerhafte Artikel.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind

a) tritt der Fehler FA auf?
b) tritt nur einer der Fehler auf?

Lösung:

$$a)\quad P(\text{"}FA\text{"}) = P(\text{"}FA\text{"} \cup \text{"}FO\text{"}) + P(\text{"}FA\text{"} \cap \text{"}FO\text{"}) - P(\text{"}FO\text{"})$$

$$= \frac{12}{100} + \frac{2}{100} - \frac{8}{100} = \frac{6}{100}$$

$$b)\quad P(\text{"nur einer der Fehler"}) = P(\text{"}nur\ FA\text{"}) + P(\text{"}nur\ FO\text{"})$$

$$= \frac{4}{100} + \frac{6}{100} = \frac{1}{10}$$

❺ Mengenoperationen

Für die Ereignisse A und B gelten die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$P(A\cup B)=0{,}8$ $\quad P(\overline{B})=0{,}6$ $\quad P(A\cap B)=0{,}1$

Berechnen Sie nun folgende Wahrscheinlichkeiten:

a) $P(B)$ b) $P(A)$ c) $P(\overline{A}\cap B)$ d) $P(\overline{A}\cup\overline{B})$

e) Erklären Sie den Unterschied zwischen $P(\overline{A}\cup\overline{B})$ und $P(\overline{A\cup B})$.

Lösung:

$$a)\quad P(B)=1-P(\overline{B})=1-0,6=0,4$$

$$b)\quad P(A)=P(A\cup B)+P(A\cap B)-P(B)=0,8+0,1-0,4=0,5$$

$$c)\quad P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})+P(B)-P(\overline{A}\cup B)=0,5+0,4-0,6=0,3$$

$$d)\quad P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{B})=0,5+0,6-0,2=0,9$$

*Lösungshilfe mittels **4-Felder-Tafel** oder Mengendiagrammen!*

	B	$\overline{B}$	$\sum$
A	**0,1**	**0,4**	**0,5**
$\overline{A}$	**0,3**	**0,2**	**0,5**
$\sum$	**0,4**	**0,6**	**1**

e) $P(\overline{A}\cup\overline{B})$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit für die Vereinigung des Komplements der jeweiligen Einzelereignisse von A und B, während $P(\overline{A\cup B})$ die Wahrscheinlichkeit für das Komplement der Vereinigungsmenge von A und B darstellt.

❻ Kombinatorik

Ein Vereinssausschuss soll drei Männer und zwei Frauen umfassen, wobei die Auswahl aus 10 männlichen und 8 weiblichen Mitgliedern erfolgen soll.

a) Wie viele verschiedene Ausschusszusammensetzungen sind möglich?

b) Wie groß wäre die Wahrscheinlichkeit, dass genau diese geschlechterspezifische Aufteilung entsteht, wenn 5 aus 18 gewählt würden?

Lösung:

$$a)\quad \binom{10}{3}\cdot\binom{8}{2}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}=3.360$$

$$b)\quad P=\frac{3.360}{\binom{18}{5}}=\frac{3.360}{\frac{18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}}=\frac{3.360}{8.568}=0{,}39215=39{,}215\,\%$$

❼ Kombinatorik

Gegeben ist das Wort **STATISTIK**.

Es wird zufällig ein Buchstabe gewählt.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für

a) ein T.
b) einen Konsonanten.
c) Wie viele verschiedene Wörter (auch sinnlose) können mit dem Wort gebildet werden?

Lösung:

$$a)\quad P(\text{"}T\text{"})=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

$$b)\quad P(\text{"}Konsonant\text{"})=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

$$c)\quad \frac{9!}{2!\cdot 3!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 1!}=\frac{9!}{24}=15.120$$