Musterlösung: **11. Jgst.** **2. Kursarbeit** **Klasse: GY 04 a**

Datum: 30.11.2004 **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: **Gebrochen-rationale Funktionen; Summenzeichen**

---

❶ **Summen I:** **Bilden Sie die Summenausdrücke bzw. stellen Sie die Summen dar**

a) $$1+3+5+7+9+11 = \sum_{i=1}^{6}(2i-1)$$

b) $$-\frac{1}{4}+\frac{2}{5}-\frac{1}{2}+\frac{4}{7}-\frac{5}{8}+\frac{2}{3} = \sum_{i=1}^{6}(-1)^i\frac{i}{i+3}$$

c) $$1+4+9+16+25+36+49+64 = \sum_{i=1}^{8}i^2$$

d) $$\sum_{i=2}^{7}(-1)^i\cdot i = 2-3+4-5+6-7$$

e) $$\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{2i} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}$$

❷ **Summen II:** **Errechnen Sie die Summen**

a) $$\sum_{i=1}^{75}\frac{1}{2}i = \frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{75}i = \frac{1}{2}\cdot\frac{75\cdot 76}{2} = 1.425$$

b) $$\sum_{i=100}^{400}i = \sum_{i=1}^{400}i-\sum_{i=1}^{99}i = \frac{400\cdot 401}{2}-\frac{99\cdot 100}{2}$$
$$= 80.200-4.950 = 75.250$$

❸ **Summen III:** **Beweisen Sie folgende Regel**

$$\sum_{i=1}^{n}(a+i) = a\cdot n+\sum_{i=1}^{n}i$$

Beweis: $$\sum_{i=1}^{n}(a+i) = \sum_{i=1}^{n}a+\sum_{i=1}^{n}i = a\cdot n+\sum_{i=1}^{n}i$$

❹ Gebrochen-rationale Funktionen I

Untersuchen Sie die folgenden drei Funktionen:

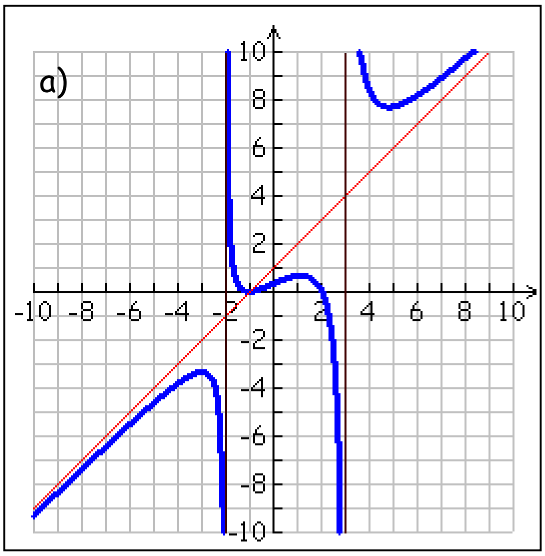
=> Definitionsbereich => Nullstelle(n); Polstellen; Lücken

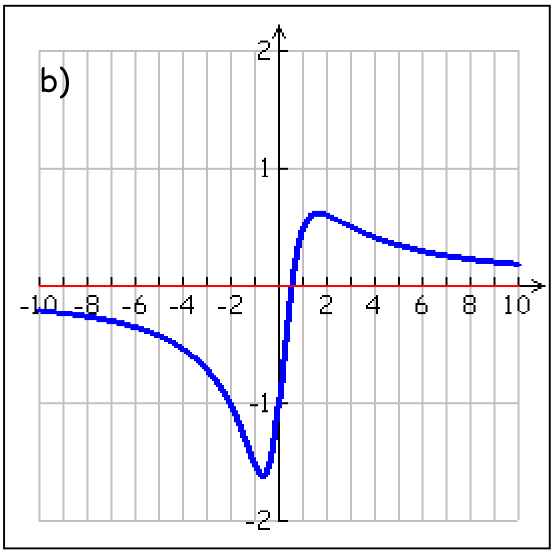
=> Asymptote

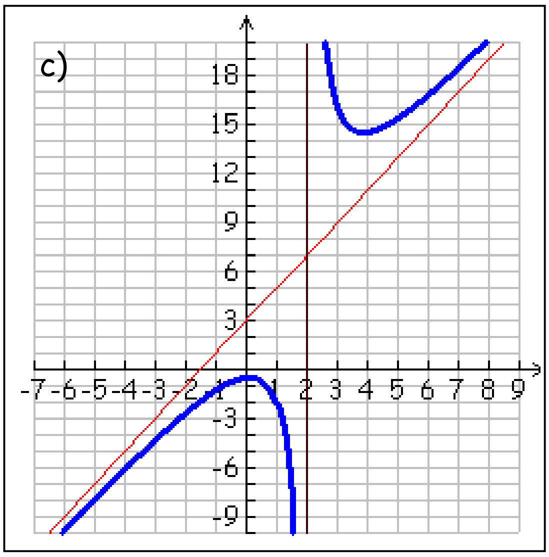
a) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2(x-2)}{(x+2)(x-3)}$ b) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+1}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^2-x+1}{x-2}$

Funktion	Polstelle	Nullstelle	Lücke	Asymptote
a)	x = -2 x = 3	x = -1 (doppelt) x = 2	keine	a(x) = x+1
b)	keine	x = $\frac{1}{2}$	keine	a(x) = 0
c)	x = 2	keine	keine	a(x) = 2x+3





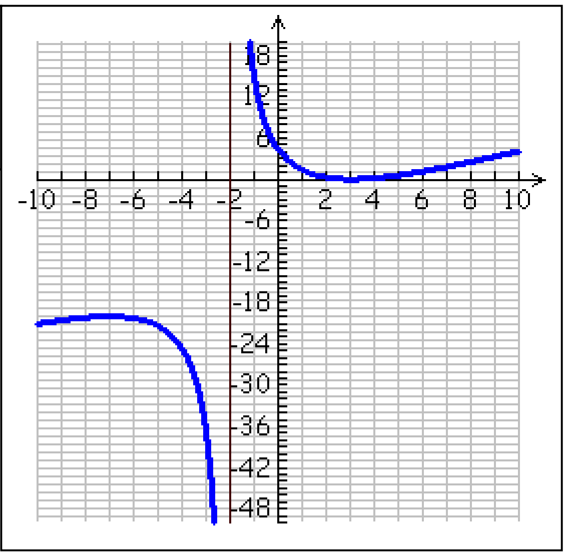


❺ Gebrochen-rationale Funktionen II

Geben Sie gebrochen-rationale Funktionen mit folgenden Eigenschaften an und zeichnen Sie:

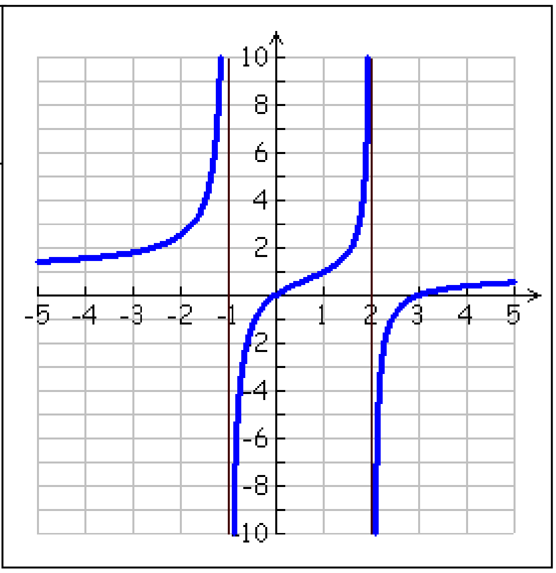
a) Polstelle mit VZW: x = -2; doppelte Nullstelle bei x = 3

$$f(x)=\frac{(x-3)^2}{x+2}$$



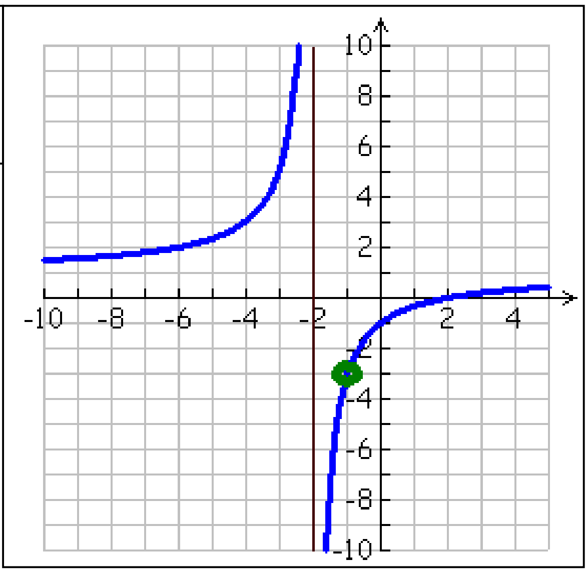
b) Polstellen: $x_1 = 2$ und $x_2 = -1$; Nullstellen bei $x_3 = 0$ und $x_4 = 3$

$$f(x)=\frac{x(x-3)}{(x-2)(x+1)}$$



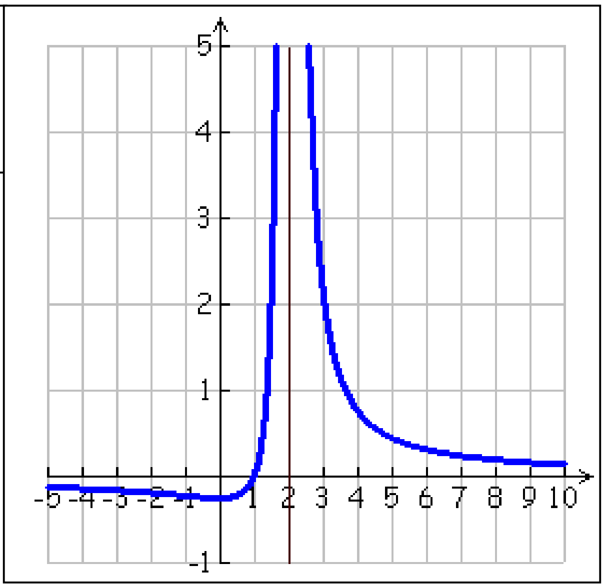
c) $D = \Re \setminus \{-2;-1\}$; Nullstelle: N(2/0); Lücke: x = -1

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{(x+2)(x+1)}$$



d) Nullstelle bei x = 1; Polstelle ohne VZW bei x = 2

$$f(x) = \frac{(x-1)}{(x-2)^2}$$



❻ Gebrochen-rationale Funktionen mit Parameter

a) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x^2 - ax - 2a}{bx}$

Für welche Werte von a und b hat f(x) eine Asymptote mit der Gleichung $t(x) = \frac{1}{2}x + 5$?

Lösung:

$$\left(x^2 - ax - 2a\right) : bx = \frac{1}{2}x + 5 \quad \left| \cdot bx\right.$$

$$x^2 - ax - 2a = \frac{1}{2}bx^2 + 5bx$$

Koeffizientenvergleich:

$$x^2 = \frac{1}{2}bx^2 \quad \Rightarrow \quad b = 2$$

$$-ax = 5bx \quad \Rightarrow \quad -ax = 5 \cdot 2x \quad \Rightarrow \quad a = -10$$

b) Gegeben ist die Funktion $f_t(x) = \frac{tx^2 + 4}{(x-2)^2}$

Für welche Werte von t hat die Funktion keine Nullstellen?

Lösung:

$$tx^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -\frac{4}{t} \quad \Rightarrow \quad |x| = \sqrt{-\frac{4}{t}}$$

$$\forall\, t \in \Re^- \setminus \{-1\} \quad \text{existieren 2 Nullstellen}$$

$$t = -1 \quad \text{existiert eine Nullstelle}: x = -2$$

❼ **Bestimmen Sie die Eigenschaften und Funktionsvorschriften folgender Funktionen aufgrund der Zeichnungen**

Funktions-vorschrift	Polstelle mit VZW	Nullstelle	Lücke	Asymptote
$f(x) = -\frac{x^2-1}{x^2-4}$	x = 2 x = -2	x = 1 x = -1	keine	a(x) = -1
$f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$	x = 1 x = -1	x = 0 (doppelt)	keine	a(x) = 1
$f(x) = \frac{x}{x^2-4}$	x = 2 x = -2	x = 0	keine	a(x) = 0

Schaubild a)

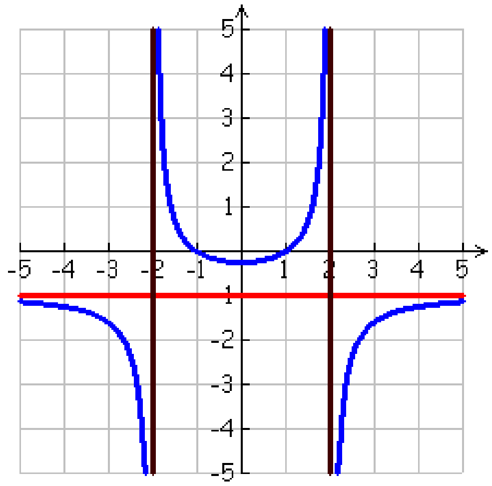


Schaubild b)

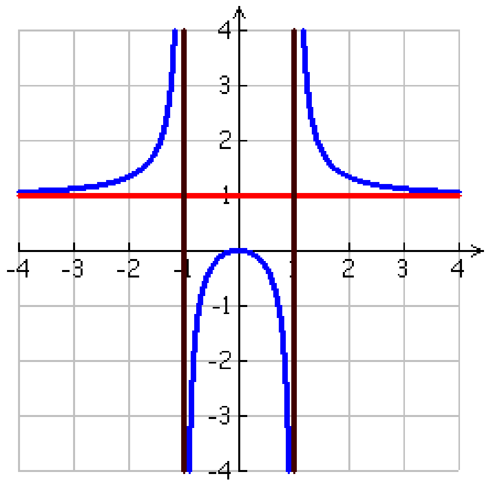
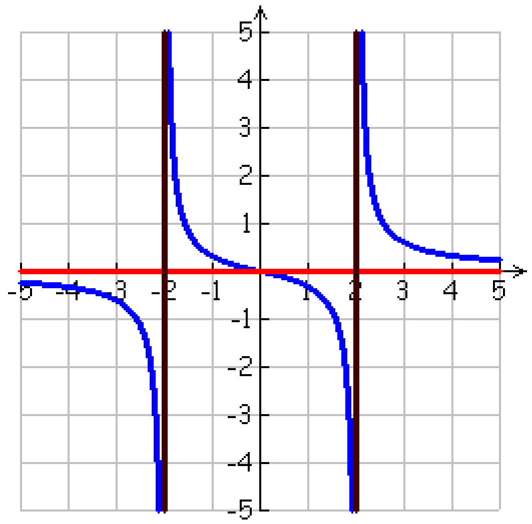


Schaubild c)



❽ **Definieren Sie folgende Begriffe bzgl. gebr.-rat. Funktionen:**

a) Polstelle

Nullstelle des Nennerpolynoms, die häufiger im Nenner- als im Zählerpolynom auftaucht; nicht behebbare Unstetigkeitsstelle; vertikale Asymptote

b) Nullstelle

Nullstelle des Zählerpolynoms, die nur im Zähler-polynom auftaucht

c) Lücke

Nullstelle des Nenner- und Zählerpolynoms, die häufiger im Zähler- als im Nennerpolynom auftaucht;
Behebbare Unstetigkeitsstelle

❾ **Lösen Sie folgende Gleichungen:**

a)

$$2x^4 + 6x^2 - 3 = 5$$

$$2u^2 + 6u - 8 = 0$$

$$u_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36+64}}{4} \quad \Rightarrow \quad u_{1/2} = \frac{-6 \pm 10}{4} \quad \Rightarrow u_1 = -4 \quad \wedge \quad u_2 = 1$$

$$x^2 = -4 \quad \text{nicht lösbar in } \Re$$

$$x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad |x| = 1$$

b)

$$x + 2\sqrt{x} - 1 = 7$$

$$u^2 + 2u - 8 = 0$$

$$u_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2} \quad \Rightarrow \quad u_{1/2} = \frac{-2 \pm 6}{2} \quad \Rightarrow \quad u_1 = -4 \quad \wedge \quad u_2 = 2$$

$$\sqrt{x} = -4 \quad \text{nicht definiert in } \Re$$

$$\sqrt{x} = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$