Musterlösung **11. Jgst.** **5. Test** **Datum: 30.05.2005**

Klasse: GY 04 a **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: Exponentialfunktionen

---

❶ **Der Punkt P liegt auf der Exponentialkurve** $f(x) = a^x$.
Berechnen Sie die Basis a.

Lösung:

$$a)\quad P(2 \mid 8)$$

$$8 = a^2 \xrightarrow{\text{"Wurzel"}} \sqrt{8} = a \quad \Rightarrow \quad f(x) = \sqrt{8}^{\,x}$$

Lösung:

$$b)\quad P\left(\frac{1}{3} \,\middle|\, 2\right)$$

$$2 = a^{\frac{1}{3}} \xrightarrow{\text{Potenzieren mit 3}} 8 = a \quad \Rightarrow \quad f(x) = 8^{\,x}$$

❷ **Die Punkte P und Q liegen auf der Exponentialkurve** $f(x) = c \cdot a^x$..
Berechnen Sie den Faktor c und die Basis a.

Lösung:

$$a)\quad P(1 \mid 1{,}5) \qquad Q(-2 \mid 12)$$

$$I.)\quad 1{,}5 = c \cdot a \qquad II.)\quad 12 = c \cdot a^{-2}$$

$$I.)\quad c = \frac{1{,}5}{a} \quad \Rightarrow \quad I.)\ in\ II.)\quad 12 = \frac{1{,}5}{a} \cdot a^{-2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad c = 3$$

Lösung:

$$b)\quad P(4 \mid 40{,}5) \qquad Q\left(-3 \,\middle|\, \frac{1}{54}\right)$$

$$I.)\quad 40{,}5 = c \cdot a^4 \qquad II.)\quad \frac{1}{54} = c \cdot a^{-3}$$

$$I.)\quad c = \frac{40{,}5}{a^4} \quad \Rightarrow \quad I.)\ in\ II.)\quad \frac{1}{54} = \frac{40{,}5}{a^4} \cdot a^{-3} \quad \Rightarrow \quad a = 3 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{2}$$

❸ **Ein Auto verliert jährlich circa 15 % seines Wertes.**

a) Erstellen Sie die zugehörige Exponentialfunktion, die den jeweiligen Restbuchwert darstellt, wenn die Anschaffungskosten 40.000,00 € betrugen.

Lösung: $$f(t) = 40.000 \cdot 0,85^t$$

b) Wie hoch ist der Restbuchwert nach 5 Jahren?

Lösung: $$f(5) = 40.000 \cdot 0,85^5 = 17.748,21$$

c) Wie hoch ist die Abschreibung im 7. Jahr der Nutzung?

Lösung:

$$f(6) = 40.000 \cdot 0,85^6 = 15.085,98$$

$$f(7) = 40.000 \cdot 0,85^7 = 12.823,08$$

$$\Delta f = 15.085,98 - 12.823,08 = 2.262,90$$

d) Nach wie viel Jahren ist das Fahrzeug nur noch 30 % des Anschaffungspreises wert?

Lösung:

$$12.000 = 40.000 \cdot 0,85^t$$

$$\frac{3}{10} = 0,85^t \Rightarrow t = \frac{\ln(0,3)}{\ln(0,85)} \Rightarrow t = 7,41 \approx 8$$

❹ **Der Baum**

Die Höhe eines Baumes wird näherungsweise durch folgende Funktion beschrieben:

$$f(t) \;=\; a - b \cdot 0{,}65^{\,t}$$ mit **t** als Anzahl der Wochen

a) Bestimmen Sie a und b (auf zwei Dezimalstellen), wenn nach 6 Wochen eine Höhe von 1,5 m und nach 8 Wochen eine Höhe von 2,05 m gemessen wird.

Lösung:

$$I.)\quad 1{,}5 \;=\; a - b \cdot 0{,}65^{\,6} \qquad II.)\quad 2{,}05 \;=\; a - b \cdot 0{,}65^{\,8}$$

$$I.) - II.)\quad -0{,}55 \;=\; -b \cdot 0{,}65^{\,6} + b \cdot 0{,}65^{\,8}$$

$$\Rightarrow\quad 0{,}55 \;=\; b \cdot 0{,}04355 \quad\Rightarrow\quad b \;=\; 12{,}63$$

$$\Rightarrow\quad 1{,}5 \;=\; a - 12{,}63 \cdot 0{,}65^{\,6} \quad\Rightarrow\quad a \;=\; 2{,}45$$

b) Gegen welchen Wert strebt $\lim\limits_{t \to \infty} f(t)$?

Lösung: $$\lim_{t \to \infty} f(t) \;=\; \lim_{t \to \infty}\left(a - b \cdot 0{,}65^{\,t}\right) \;=\; \lim_{t \to \infty} a$$

❺ **Schreiben Sie den Funktionsterm f in der Form** $f(x) = c \cdot a^x$

a) $f(x) = 4^{3x-2}$

Lösung: $$f(x) = 4^{3x-2} \quad\Rightarrow\quad f(x) = 4^{3x} \cdot 4^{-2} \quad\Rightarrow\quad f(x) = 64^x \cdot \frac{1}{16}$$

b) $f(x) = \dfrac{1}{8^{x+4}}$

Lösung: $$f(x) = \frac{1}{8^{x+4}} \quad\Rightarrow\quad f(x) = \frac{1}{8^x} \cdot \frac{1}{8^4} \quad\Rightarrow\quad f(x) = \left(\frac{1}{8}\right)^x \cdot \frac{1}{4.096}$$

c) $f(x) = \dfrac{25}{5^{x+3}}$

Lösung: $$f(x) = \frac{25}{5^{x+3}} \quad\Rightarrow\quad f(x) = \frac{1}{5^x} \cdot \frac{25}{5^3} \quad\Rightarrow\quad f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x \cdot \frac{1}{5}$$

❻ **Lösen Sie folgende Gleichungen**

a) $4^x = 2$

Lösung:

$$4^x = 2 \quad \Rightarrow \quad \left(2^2\right)^x = 2 \quad \Rightarrow \quad 2^{2x} = 2^1 \quad \xrightarrow[\textit{Exp.-Vergleich}]{2x=1} \quad x = \frac{1}{2}$$

b) $\frac{1}{9} \cdot 3^{2x-1} = \sqrt{3}$

Lösung:

$$\frac{1}{9} \cdot 3^{2x-1} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad 3^{2x} = 3^{\frac{7}{2}} \quad \xrightarrow[\textit{Exp.-Vergleich}]{2x=\frac{7}{2}} \quad x = \frac{7}{4}$$

c) $3 \cdot 8^x = 2^2 \cdot 4^{x-1}$

Lösung:

$$3 \cdot 8^x = 2^2 \cdot 4^{x-1} \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot 8^x = 4^x \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot 2^{3x} = 2^{2x}$$

$$\Rightarrow \quad 2^x = \frac{1}{3} \quad \xrightarrow{\textit{Logarithmieren}} \quad x = \frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{\ln(2)} = -1,59$$

d) $8 \cdot 4^x = 0$

Lösung: $8 \cdot 4^x = 0 \quad \Rightarrow \quad 4^x = 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{keine Lösung}$