Musterlösung **12. Jgst.** **3. Kursarbeit** **Datum: 06.04.2006**

**Klasse: GY 04 c** **Fach: Mathematik (Leistungskurs)**

**Themen:** **Matrizen, Definitionen, Rechenoperationen, Beweise und Anwendungen**

---

## 1.) Matrizenmultiplikation

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} r & 0 & s \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$ $mit\ r, s \in \Re$.

Wie lautet die Potenz $A^n\ mit\ n \in N$?

Ermitteln Sie hierzu zuerst die Ergebnisse für $A^2$, $A^3$ und $A^4$.

***Lösung:***

$$A^2 = \begin{pmatrix} r & 0 & s \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r & 0 & s \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 & 2rs \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} r^2 & 0 & 2rs \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r & 0 & s \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^3 & 0 & 3r^2 s \\ 0 & r^3 & 0 \\ 0 & 0 & r^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} r^3 & 0 & 3r^2 s \\ 0 & r^3 & 0 \\ 0 & 0 & r^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r & 0 & s \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^4 & 0 & 4r^3 s \\ 0 & r^4 & 0 \\ 0 & 0 & r^4 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} r^n & 0 & nr^{n-1} s \\ 0 & r^n & 0 \\ 0 & 0 & r^n \end{pmatrix}$$

## 2.) Matrizen erstellen

Erstellen Sie je eine 4x4-Matrix, für deren Elemente gilt

a) $a_{i\,j} = i^2 - j$

b) $b_{i\,j} = \begin{cases} |-i + j| & \text{für } i < j \\ (-1)^j & \text{für } i = j \\ i^{\,j+1} & \text{für } i > j \end{cases}$

c) Gegen Sie ein Bildungsgesetz für folgende Matrix an:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

***<u>Lösung:</u>***

a) $$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 15 & 14 & 13 & 12 \end{pmatrix}$$

b) $$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 9 & 27 & -1 & 1 \\ 16 & 64 & 256 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $$a_{i\,j} = \begin{cases} 0 & \text{für } i = j \\ |j - i| & \text{sonst} \end{cases}$$ oder einfacher: $$a_{i\,j} = |j - i|$$

**3.) Rechenoperationen und Beweise**

a) Geben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *und* $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(i) Geben Sie die Bedingungen für A, so dass gilt: A * B = B * A

(ii) Ermitteln Sie zwei Matrizen A, welche diese Bedingungen erfüllen.

***<u>Lösung:</u>***

$$a) \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a - b & 2a + b \\ 3c - d & 2c + d \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + 2c & 3b + 2d \\ -a + c & -b + d \end{pmatrix}$$

$Bedingungen:$

$$I.) \quad 3a - b = 3a + 2c \Rightarrow b = -2c$$

$$II.) \quad 2a + b = 3b + 2d \Rightarrow a = b + d = d - 2c$$

$Beispiele:$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad oder \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad oder \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad oder \quad A_4 = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

allgemein: $$A = \begin{pmatrix} d - 2c & -2c \\ c & d \end{pmatrix}$$

b) Zeigen Sie, dass die Behauptung falsch ist:

***A * A = Nullmatrix => A = Nullmatrix***

***Lösung:***

$$A\cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Bedingungen:$$

$$I.)\quad a^2+bc = 0 \Rightarrow a^2 = -bc$$

$$II.)\quad ab+bd = 0 \Rightarrow a = -d$$

$$Beispiele:$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) In welchen Fällen kann das Matrizenprodukt ***A * B * C*** gebildet werden? Kreuzen Sie an. *Bei „Ja" => Format Ergebnis?*

| Nr. | Matrix A | Matrix B | Matrix C | Ja ? | Nein ? | Format |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (2,3) | (3,4) | (4,5) | X | | **(2,5)** |
| 2 | (3,4) | (5,3) | (4,5) | | X | |
| 3 | (2,4) | (4,3) | (3,3) | X | | **(2,3)** |

d) Prüfen Sie die Richtigkeit des folgenden Rechengesetzes mit allgemeinen 2x2-Matrizen:

$$(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$$

***Lösung:***

$$\left.\begin{aligned}
(A\cdot B)^T &= \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right]^T = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}^T \\
(A\cdot B)^T &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} \\ a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \\
B^T\cdot A^T &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11}+b_{21}a_{12} & b_{11}a_{21}+b_{21}a_{22} \\ b_{12}a_{11}+b_{22}a_{12} & b_{12}a_{21}+b_{22}a_{22} \end{pmatrix} \\
B^T\cdot A^T &\overset{K-Gesetz}{=} \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} \\ a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}
\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad (A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$$

**4.) Grundlegende Rechenoperationen zu Matrizen**

Gegeben seien die Matrizen $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ und $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

Führen Sie folgende Rechenoperationen aus:

a) $\left(2A+B^T\right)^T$ b) $E+\frac{1}{2}(A-B)^2$ c) $\left(A^2+E^T\right)\cdot B$

***Lösung:***

**a)**

$$\left[2\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}^T\right]^T = \left[\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\right]^T = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 10 & -9 \end{pmatrix}$$

**b)**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 30 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 15 & 8 \end{pmatrix}$$

**c)**

$$\left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}^2+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T\right]\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & -10 \\ -5 & 18 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ -5 & 19 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -52 & 22 \\ 104 & -34 \end{pmatrix}$$

**5.) Ökonomie**

Die Unternehmung Armes Brot AG verarbeitet die Materialien $M_1$, $M_2$ und $M_3$ zu den Zwischenprodukten $Z_1$, $Z_2$ und $Z_3$ und diese Zwischenprodukte zu den Endprodukten $E_1$, $E_2$ und $E_3$ .

Die folgenden Matrizen stellen die Stücklisten bzw. Materialverflechtungen dar.

$$M_{MZ} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad M_{ZE} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Wie viele Materialien werden pro Endprodukt gebraucht?

***Zusatzauftrag:*** Zeigen Sie, dass die Zeilensummen der Ergebnismatrix dem Vektor (44 48 29) entsprechen.

***Lösung:***

$$M_{MZ} \cdot M_{ZE} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 14 & 18 \\ 14 & 14 & 20 \\ 8 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

b) Die Firma erhält einen Auftrag vom Umfang (10 25 20).

Der Vorrat an **Zwischenprodukten** beträgt (200 100 85).

Prüfen Sie, ob der vorhandene Bestand genügt bzw. ob nachbestellt werden muss.

***Lösung:***

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 175 \\ 100 \\ 85 \end{pmatrix}$$

c) Der Vorrat an **Zwischenprodukten** beträgt nun (130 70 60).

Unser Chef Rudi Nutzlos will nun wissen, wie viele Endprodukte wir herstellen können, wenn wir unser Zwischenproduktlager komplett leeren würden.

***Lösung:***

$$\begin{array}{l|l} \begin{array}{lccc} I.) & 2 & 3 & 4 \\ II.) & 1 & 2 & 2 \\ III.) & 2 & 1 & 2 \end{array} & \begin{array}{l} 130 \\ 70 \\ 60 \end{array} \end{array} \xrightarrow{I.)-II.)}$$

$$\begin{array}{l|l} \begin{array}{lccc} I.) & 1 & 1 & 2 \\ II.) & 1 & 2 & 2 \\ III.) & 2 & 1 & 2 \end{array} & \begin{array}{l} 60 \\ 70 \\ 60 \end{array} \end{array} \xrightarrow[III.)-2\cdot I.)]{II.)-I.)}$$

$$\begin{array}{l|l} \begin{array}{lccc} I.) & 1 & 1 & 2 \\ II.) & 0 & 1 & 0 \\ III.) & 0 & -1 & -2 \end{array} & \begin{array}{l} 60 \\ 10 \\ -60 \end{array} \end{array} \xrightarrow[III.)+II.)]{I.)-II.)}$$

$$\begin{array}{l|l} \begin{array}{lccc} I.) & 1 & 0 & 2 \\ II.) & 0 & 1 & 0 \\ III.) & 0 & 0 & -2 \end{array} & \begin{array}{l} 50 \\ 10 \\ -50 \end{array} \end{array} \xrightarrow[-\frac{1}{2}\cdot III.)]{I.)+III.)}$$

$$\begin{array}{l|l} \begin{array}{lccc} I.) & 1 & 0 & 0 \\ II.) & 0 & 1 & 0 \\ III.) & 0 & 0 & 1 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 10 \\ 25 \end{array} \end{array} \Rightarrow \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 25 \end{pmatrix}$$

Die Kosten bzw. Verkaufpreise seien durch folgende Vektoren gegeben:

Kosten Materialien: $\vec{k_M} = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 20 \end{bmatrix}$

Kosten Zwischenproduktproduktion: $\vec{k_Z} = \begin{bmatrix} 80 & 100 & 120 \end{bmatrix}$

Kosten Endproduktmontage: $\vec{k_E} = \begin{bmatrix} 410 & 510 & 620 \end{bmatrix}$

Verkaufspreise: $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1.500 & 2.000 & 2.500 \end{bmatrix}$

d) Berechnen Sie die Materialgesamtkosten für jedes einzelne Endprodukt.

***<u>Lösung:</u>***

$$\begin{bmatrix}10 & 15 & 20\end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix}12 & 14 & 18 \\ 14 & 14 & 20 \\ 8 & 9 & 12\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}490 & 530 & 720\end{bmatrix}$$

e) Berechnen Sie die Gesamtkosten für jedes einzelne Endprodukt.

***<u>Lösung:</u>***

$$Zwischenproduktproduktion:$$

$$\begin{bmatrix}80 & 100 & 120\end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}500 & 560 & 760\end{bmatrix}$$

$$\text{variableGesamtkosten:}$$

$$\begin{aligned} \text{vGK} &= \begin{bmatrix}490 & 530 & 720\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}500 & 560 & 760\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}410 & 510 & 620\end{bmatrix} \\ \text{vGK} &= \begin{bmatrix}1.400 & 1.600 & 2.100\end{bmatrix} \end{aligned}$$

f) Wie hoch ist der Deckungsbeitrag für jedes einzelne Endprodukt.

***<u>Lösung:</u>***

$$\begin{aligned} DB &= Ertrag - vGK \\ DB &= \begin{bmatrix}1.500 & 2.000 & 2.500\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1.400 & 1.600 & 2.100\end{bmatrix} \\ DB &= \begin{bmatrix}100 & 400 & 400\end{bmatrix} \end{aligned}$$

g) Der Betrieb erhält einen Auftrag über (130 175 150).
Die Fixkosten betragen 123.000,00 €.

Wie hoch ist der Gewinn?

***<u>Lösung:</u>***

$$\vec{g} = \begin{pmatrix}100 \\ 400 \\ 400\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}130 \\ 175 \\ 150\end{pmatrix} - 123.000 = 143.000 - 123.000 = 20.000$$

h) Die Unternehmung hatte Endprodukte im Mengenverhältnis 3 : 2 : 1 gefertigt und dabei 1.350 ME von M3 verarbeitet.

Wie viele ME der anderen beiden Materialien wurden benötigt?

***Lösung:***

$$\begin{pmatrix} 12 & 14 & 18 \\ 14 & 14 & 20 \\ 8 & 9 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3x \\ 2x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82x \\ 90x \\ 54x \end{pmatrix} \Rightarrow 54x = 1.350 \Rightarrow x = 25$$

$$\Rightarrow M_2 = 90 \cdot 25 = 2.250 \Rightarrow E_2 = 2 \cdot 25 = 50$$

$$\Rightarrow M_1 = 82 \cdot 25 = 2.050 \Rightarrow E_1 = 3 \cdot 25 = 75$$

**6.) Lineare Algebra und Analysis - ein Widerspruch???**

Gegeben sind die Matrix $A_t$ und die Vektoren $\vec{b}_a$ und $\vec{c}_t$ durch

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 2t & t \\ -t & t+1 & 1-t \\ 2 & -t & 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_a = \begin{pmatrix} -2a \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c}_t = \begin{pmatrix} t \\ t^2-t \\ 1+t \end{pmatrix}$$

wobei $t \in \Re$ und $a \in \Re$ gelten.

Die Funktion $f_a(t)$ ist gegeben durch $f_a(t) = \vec{b}^{\,T} \cdot A_t \cdot \vec{c} - a - 2$

a) Zeigen sie, dass gilt: $f_a(t) = -t^3(3a+1) + t^2 + t(4-5a)$

***Lösung:***

***Lösung durch Einsetzen und Nachrechnen***

b) Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion $f_a(t)$ in Abhängigkeit von a.

***Lösung:***

$$f_a(t) = -t^3(3a+1) + t^2 + t(4-5a) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow t\left[-t^2(3a+1) + t + (4-5a)\right] \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow t_1 = 0 \wedge t_{2/3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(3a+1)(4-5a)}}{-2}$$

c) Für welche Werte von a hat die Funktion nur eine Nullstelle? Wie lautet die Nullstelle?

***Lösung:***

$$t_1 = 0 \quad \wedge \quad t_{2/3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(3a+1)(4-5a)}}{-2}$$

$$\Rightarrow \quad 1-4(3a+1)(4-5a) \quad < \quad 0$$

$$\Rightarrow \quad 60a^2 - 28a - 15 \quad = \quad 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 \approx 0,78 \quad \wedge \quad a_2 \approx -0,32$$

$$\Rightarrow \quad eine\ Nullstelle\ bei\ t_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \in \left]-0,32\,;0,78\right[$$

d) Welche Bedingung muss für a gelten, damit die Funktion eine Wendestelle besitzt? Berechnen Sie diese Stelle.

***Lösung:***

$$f_a{}'(t) \quad = \quad -3t^2(3a+1) + 2t + (4-5a)$$

$$f_a{}''(t) \quad = \quad -6t(3a+1) + 2 \quad \overset{!}{=} \quad 0 \quad \Rightarrow \quad t \quad = \quad \frac{1}{3(3a+1)}$$

$$f_a{}'''(t) \quad = \quad -6(3a+1) \quad \neq \quad 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3a-1 \quad \neq \quad 0 \quad \Rightarrow \quad a \quad \neq \quad \frac{1}{3}$$

e) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f_a(t)$.

***Lösung:***

$$F_a(t) = -\frac{1}{4}t^4(3a+1) + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2(4-5a) + c$$

**7.) Lineare Gleichungssysteme**

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Gleichungssysteme:

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

***Lösung:***

$$\begin{array}{lccc|c} I.) & 1 & 1 & 0 & 6 \\ II.) & 1 & 0 & 1 & 8 \\ III.) & 1 & 1 & 1 & 12 \end{array} \quad \xrightarrow[III.)-I.)]{II.)-I.)}$$

$$\begin{array}{lccc|c} I.) & 1 & 1 & 0 & 6 \\ II.) & 0 & -1 & 1 & 2 \\ III.) & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \quad \xrightarrow{II.)-III.)}$$

$$\begin{array}{lccc|c} I.) & 1 & 1 & 0 & 6 \\ II.) & 0 & -1 & 0 & -4 \\ III.) & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \quad \xrightarrow[(-1)\cdot II.)]{I.)+II.)}$$

$$\begin{array}{lccc|c} I.) & 1 & 0 & 0 & 2 \\ II.) & 0 & 1 & 0 & 4 \\ III.) & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \quad \Rightarrow \quad L = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

***<u>Lösung:</u>***

$$\begin{array}{llll|l} I.) & 3 & 2 & 1 & 12 \\ II.) & 4 & -5 & -1 & -4 \\ III.) & -2 & 1 & 3 & 4 \end{array} \xrightarrow[II.)+2\cdot III.)]{I.)+III.)}$$

$$\begin{array}{llll|l} I.) & 1 & 3 & 4 & 16 \\ II.) & 0 & -3 & 5 & 4 \\ III.) & -2 & 1 & 3 & 4 \end{array} \xrightarrow{III.)+2\cdot I.)}$$

$$\begin{array}{llll|l} I.) & 1 & 3 & 4 & 16 \\ II.) & 0 & -3 & 5 & 4 \\ III.) & 0 & 7 & 11 & 36 \end{array} \xrightarrow{III.)+2\cdot II.)}$$

$$\begin{array}{llll|l} I.) & 1 & 3 & 4 & 16 \\ II.) & 0 & -3 & 5 & 4 \\ III.) & 0 & 1 & 21 & 44 \end{array} \xrightarrow[II.)+3\cdot III.)]{I.)-3\cdot III.)}$$

$$\begin{array}{llll|l} I.) & 1 & 0 & -59 & -116 \\ II.) & 0 & 0 & 68 & 136 \\ III.) & 0 & 1 & 21 & 44 \end{array} \xrightarrow[III.)-\frac{21}{68}\cdot II.)]{\frac{1}{68}\cdot II.)}$$

$$\begin{array}{llll|l} I.) & 1 & 0 & -59 & -116 \\ II.) & 0 & 0 & 1 & 2 \\ III.) & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \xrightarrow{I.)+59\cdot II.)}$$

$$\begin{array}{llll|l} I.) & 1 & 0 & 0 & 2 \\ II.) & 0 & 1 & 0 & 2 \\ III.) & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \Rightarrow \quad L = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

c) $$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2a \\ 4 & -3 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Für welche Werte von a hat das LGS

(i) eine Lösung? (ii) keine Lösung?

***Lösung:***

$$\begin{array}{llll|l} I.) & 3 & 2 & 2a & a \\ II.) & 4 & -3 & 1 & 11 \\ III.) & -1 & 5 & -1 & 10 \end{array} \xrightarrow[(-1)\cdot III.)]{I.) \leftrightarrow III.)}$$

$$\begin{array}{llll|l} I.) & 1 & -5 & 1 & -10 \\ II.) & 4 & -3 & 1 & 11 \\ III.) & 3 & 2 & 2a & a \end{array} \xrightarrow[III.)-3\cdot I.)]{II.)-4\cdot I.)}$$

$$\begin{array}{llll|l} I.) & 1 & -5 & 1 & -10 \\ II.) & 0 & 17 & -3 & 51 \\ III.) & 0 & 17 & 2a-3 & a+30 \end{array} \xrightarrow{III.)-II.)}$$

$$\begin{array}{llll|l} I.) & 1 & -5 & 1 & -10 \\ II.) & 0 & 17 & -3 & 51 \\ III.) & 0 & 0 & 2a & a-21 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{keine Lösung}$$

$$\Rightarrow \quad a \in \Re \setminus \{0\} \quad \Rightarrow \quad \textit{eine Lösung}$$

d) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Wählen Sie z bzw. $x_3$ als freie Variable.

***Lösung:***

$$\begin{array}{lrrr|r} I.) & 3 & -2 & 6 & 1 \\ II.) & 2 & 1 & -4 & 5 \end{array} \xrightarrow{I.)-II.)}$$

$$\begin{array}{lrrr|r} I.) & 1 & -3 & 10 & -4 \\ II.) & 2 & 1 & -4 & 5 \end{array} \xrightarrow{II.)-2\cdot I.)}$$

$$\begin{array}{lrrr|r} I.) & 1 & -3 & 10 & -4 \\ II.) & 0 & 7 & -24 & 13 \end{array} \xrightarrow{\frac{1}{7}\cdot II.)}$$

$$\begin{array}{lrrr|r} I.) & 1 & -3 & 10 & -4 \\ II.) & 0 & 1 & -\frac{24}{7} & \frac{13}{7} \end{array} \xrightarrow{I+3\cdot II.)}$$

$$\begin{array}{lrrr|r} I.) & 1 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{11}{7} \\ II.) & 0 & 1 & -\frac{24}{7} & \frac{13}{7} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{7} + \frac{2}{7}z \\ \frac{13}{7} + \frac{24}{7}z \\ z \end{pmatrix} \right\}$$